

## BRAS DE PELLETEUSE ELECTRIQUE

### Modélisation mécanique

### Sommaire

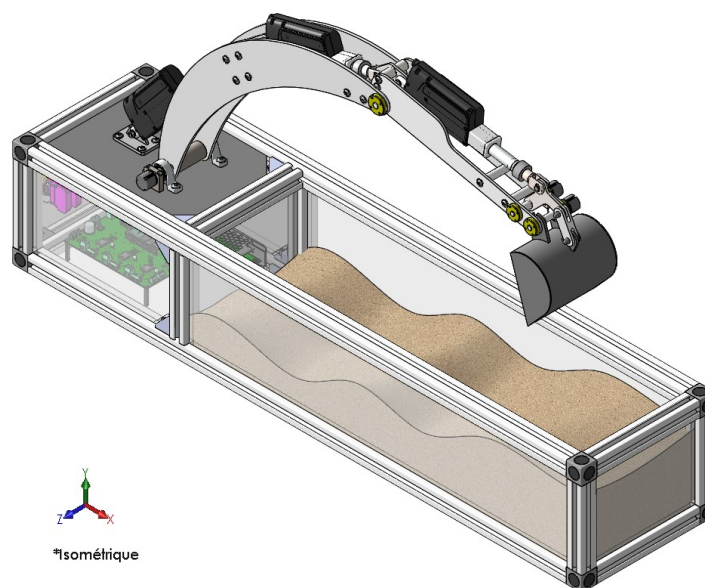
1	Modélisation géométrique.....	4
1.1	Présentation de la pelleteuse .....	4
1.2	Organisation des dossiers dans Windows .....	4
1.3	Arbres de construction de la pelleteuse .....	5
1.4	Vérin électrique .....	5
1.4.1	Constitution mécanique.....	5
1.4.2	Maquette numérique du vérin .....	7
1.5	Maquette numérique du schéma cinématique .....	11
1.5.1	Constitution .....	11
1.5.2	Organisation des dossiers et arbre de construction.....	12
1.6	Epure de la pelleteuse.....	13
1.7	Schéma cinématique et paramétrage .....	13
1.8	Modèle géométrique direct (MGD) .....	14
1.9	Modèle géométrique inverse (MGI).....	15
1.10	Cas du porteur seul constitué de la flèche 1 et du balancier 2.....	16
1.10.1	.....	MGD
16		
1.10.2	.....	MGI
16		
1.11	Génération de mouvement point à point avec une trajectoire imposée .....	17
1.12	Paramètres géométriques des solides .....	19
1.13	Entrée-sortie géométrique vérin de flèche-flèche.....	20
1.14	Entrée-sortie géométrique vérin de pénétration-balancier .....	22
1.15	Entrée-sortie géométrique vérin de cavage-triangle .....	24
1.16	Entrée-sortie géométrique triangle-godet.....	25
1.16.1	.....	Méthode 1
25		
1.16.2	.....	Méthode 2
28		
2	Modélisation cinématique .....	29
2.1	Modèle cinématique direct .....	29
2.1.1	Dérivation temporelle du MGD.....	29
2.1.2	Cinématique du solide.....	29
2.2	Modèle cinématique inverse.....	30
2.3	Cas du porteur seul constitué de la flèche 1 et du balancier 2.....	31
2.4	Relation entre les vitesses des coulisseaux des vérins et les vitesses articulaires .....	32
2.4.1	Vitesse du vérin de flèche V1.....	32
2.4.2	Vitesse du vérin de pénétration V2 .....	33
2.4.3	Vitesse du vérin de cavage V3.....	35
2.4.4	Relation entre les vitesses angulaires du triangle et du godet.....	36
2.5	Génération de mouvement point à point avec lois horaires imposées .....	39
2.6	Simulation de l'épure .....	42
2.7	Loi entrée-sortie cinématique du vérin électrique.....	43
2.7.1	Schéma cinématique.....	43

2.7.2 Détermination du rapport de transmission .....	43
3 Modélisation statique .....	44
3.1 Analyse mécanique de la version V1 .....	44
3.2 Analyse mécanique de la version V2 .....	44
3.3 Action mécanique du vérin V1 sur la flèche 1 .....	46
3.4 Action mécanique du vérin V2 sur le balancier 2 .....	48
3.5 Action mécanique du vérin V3 sur le triangle 5 .....	50
3.6 Détermination des centres de masses .....	52
3.6.1 Détermination de $\vec{O_1G_1}$ .....	53
3.6.2 Détermination de $\vec{O_1G_2}$ .....	54
3.6.3 Détermination de $\vec{O_1G_3}$ .....	55
3.6.4 Détermination de $\vec{O_1G_4}$ .....	56
3.6.5 Détermination de $\vec{O_1G_5}$ .....	56
3.6.6 Détermination de $\vec{O_1G_2''}$ .....	57
3.6.7 Détermination de $\vec{O_1G_2'}$ .....	58
3.6.8 Détermination de $\vec{O_1G_3''}$ .....	58
3.6.9 Détermination de $\vec{O_1G_3'}$ .....	58
4 Modélisation dynamique .....	59
4.1 Analyse mécanique .....	59
4.2 Simulation dynamique de la pelleteuse .....	59
4.2.1 Contraintes cinématiques .....	60
4.2.2 Modélisation cinématique dans Méca3D .....	60
4.2.3 Modélisation dynamique dans Méca3D .....	62
4.3 Modélisation dynamique d'un vérin .....	64
4.3.1 Evaluation des masses et des inerties des pièces du vérin électrique .....	64
4.3.2 Analyse mécanique .....	65
4.3.3 Inertie équivalente du vérin .....	67
4.3.4 Equation de mouvement du vérin .....	68
4.3.5 Simulation dynamique du vérin .....	70
4.4 Détermination analytique de l'effort du vérin de flèche en dynamique .....	71
4.4.1 Contraintes cinématiques .....	71
4.4.2 Hypothèses .....	71
4.4.3 Isolement de $E \equiv 1 \cup D$ .....	72
4.4.4 Actions mécaniques .....	72
4.4.5 Moment dynamique $\vec{\delta}_{O_1E/0} \cdot \vec{z}$ .....	74
4.4.6 Application du principe fondamental de la dynamique .....	76
4.4.7 Application numérique .....	76

## 1 Modélisation géométrique

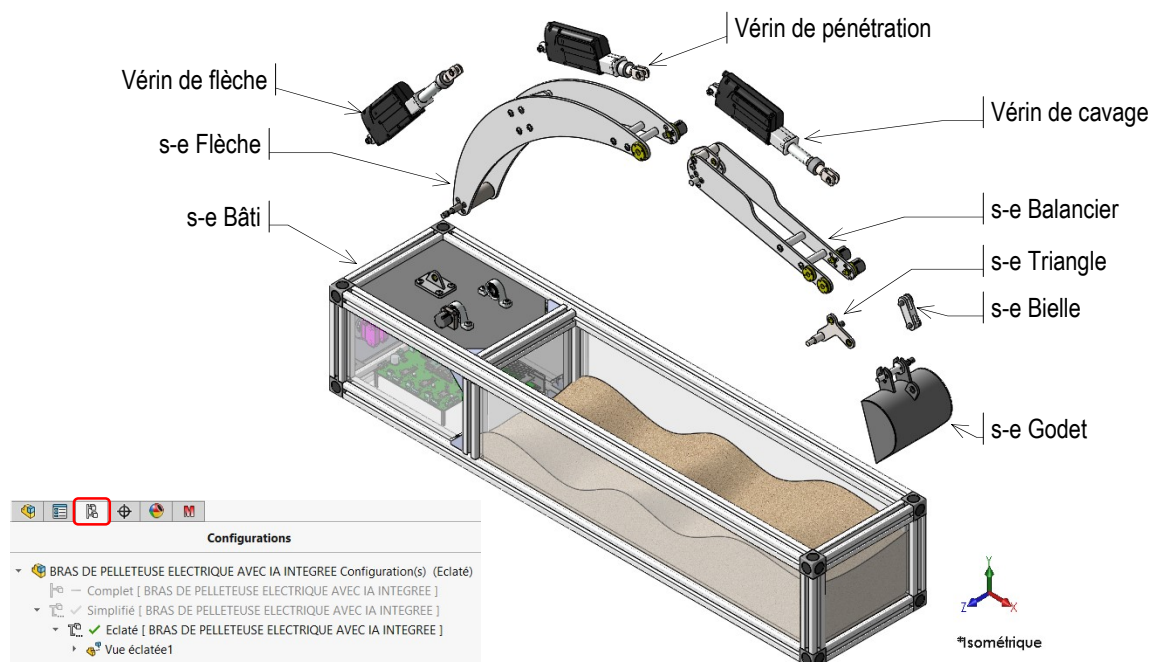
### 1.1 Présentation de la pelleteuse

La *fig. 1* montre une image de la maquette numérique de la pelleteuse électrique construite avec SolidWorks 2019-2020.



*fig. 1 : Image de la maquette numérique de la pelleteuse*

La *fig. 2* montre un éclaté de la maquette. La pelleteuse électrique autonome est constituée essentiellement de six sous-ensembles principaux (cinématiquement équivalents) actionnés par trois vérins électriques.



*fig. 2 : Eclaté de la maquette numérique de la pelleteuse*

### 1.2 Organisation des dossiers dans Windows

La *fig. 3* montre l'organisation des dossiers dans Windows. On retrouve les six s-e principaux ainsi qu'un dossier vérin et quatre dossiers complémentaires « s-e Codeur », « s-e Capteur », « Quincaillerie » et « Sous-ensembles ». Ce dernier dossier contient des s-e de la pelleteuse qui autorisent des études mécaniques en îlots.



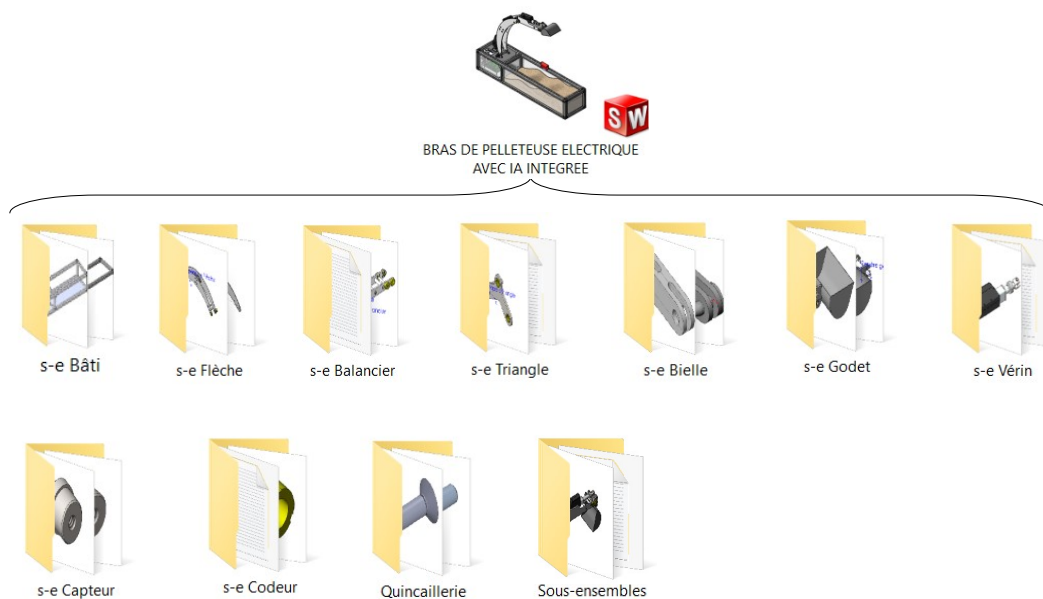


fig. 3 : Organisation des dossiers dans Windows

### 1.3 Arbres de construction de la pelleteuse

La fig. 4 montre les arbres de construction de premier niveau de la maquette. Cette maquette est construite à partir des pièces contenues dans les différents dossiers et présente deux configurations nommées « complète » et « simplifiée ».

La configuration « complète » comporte les s-e principaux et toutes les pièces des vérins (§ 1.4). Dans la configuration « simplifiée » ne subsiste que les carter et les coulisseaux des trois vérins.

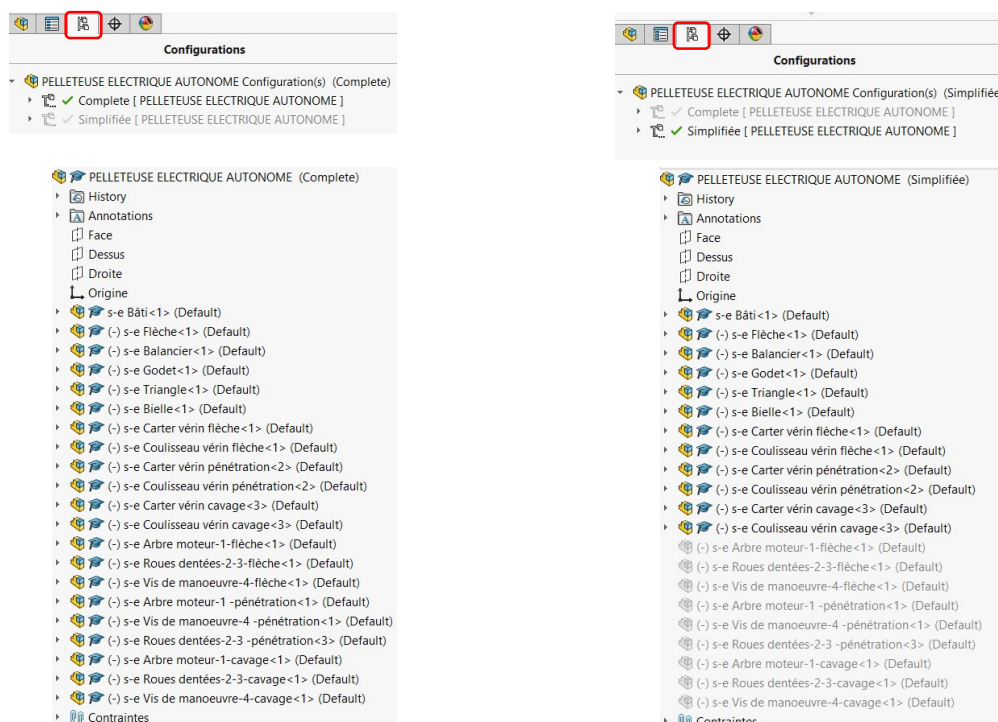


fig. 4 : Arbres de construction des deux configurations de la maquette

### 1.4 Vérin électrique

#### 1.4.1 Constitution mécanique

Le vérin électrique TA38 est un produit conçu et fabriqué par la société TiMOTION.

Le démontage de la partie supérieure du carter fait apparaître les pièces et les sous-ensembles du vérin.  
Dans le carter, en deux parties, se trouvent principalement :

- un moteur électrique ;
- une carte électronique ;
- un système de transmission du mouvement de rotation du moteur à un système vis-écrou.

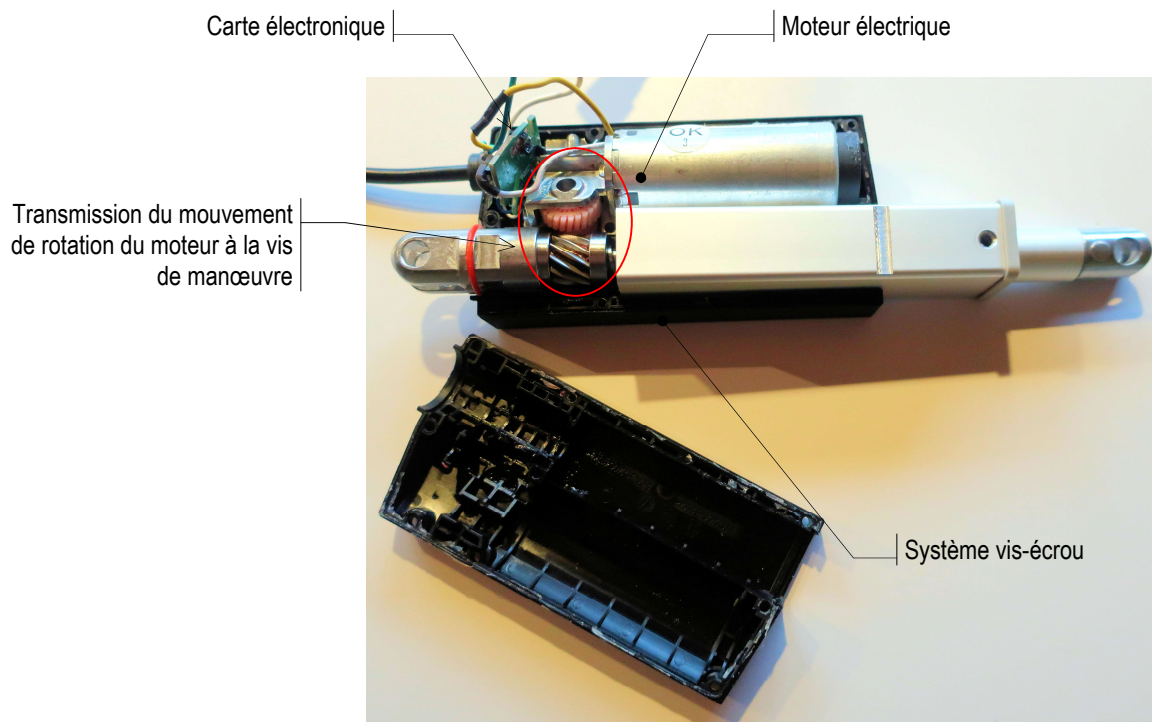


fig. 5 : Ensemble du vérin électrique

La fig. 6 montre le détail de la transmission du mouvement depuis l'arbre moteur jusqu'à la vis de manœuvre. L'arbre moteur (vis sans fin 1 à deux filets) engrène avec une roue hélicoïdale 2 de 25 dents. Cette dernière est liée complètement à une roue hélicoïdale 3 de 6 dents qui engrène avec une roue hélicoïdale 4 de 11 dents d'axe orthogonal à 3.

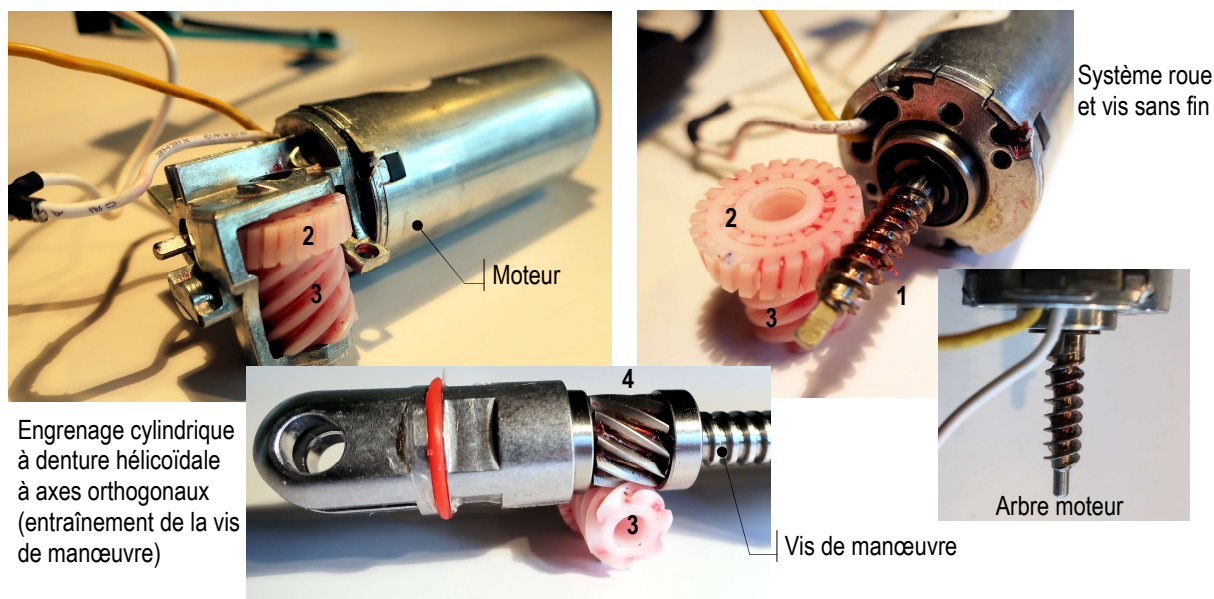
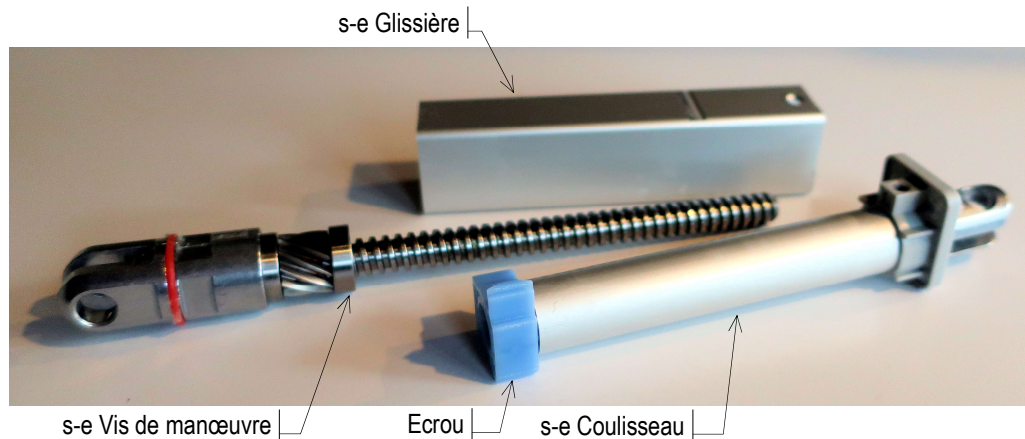


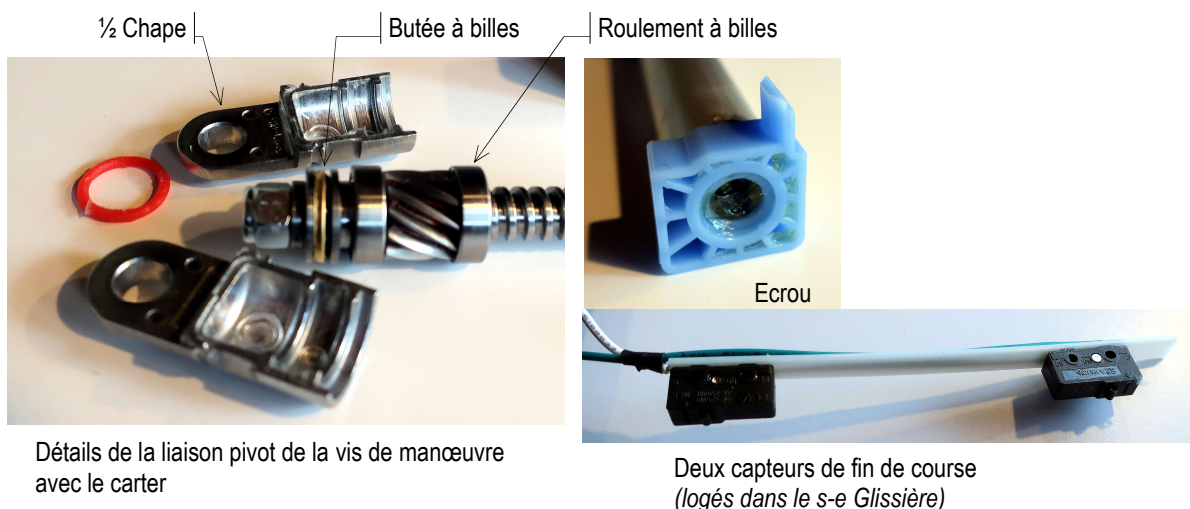
fig. 6 : Détail de la transmission de mouvement

La *fig. 7* montre la constitution du système vis-écrou. Il est principalement et classiquement constitué d'une glissière (tube carré), d'un écrou lié complètement à un tube cylindrique (s-e coulisseau) et d'une vis de manœuvre en liaison pivot par rapport au carter (*fig. 8*). La liaison pivot est, plus précisément, réalisée entre les deux  $\frac{1}{2}$  chapes liées complètement au carter et la vis de manœuvre par deux roulements à billes et une butée à billes simple effet.

La glissière est munie de deux interrupteurs de fin de course actionnés par l'intermédiaire de l'ergot de l'écrou.



*fig. 7 : Système de transformation de mouvement (système vis-écrou)*



*fig. 8 : Détails de la liaison pivot de la vis de manœuvre et interrupteurs de fin de course*

#### 1.4.2 Maquette numérique du vérin

##### Présentation

Le constructeur du vérin ne donne pas de renseignements sur les caractéristiques des roues dentées, de la vis sans fin et de la vis de manœuvre. Les normes utilisées pour ces éléments ne sont manifestement pas les normes ISO. De plus nous n'avons pas la désignation des matériaux utilisés. Les seules informations sont celles données sur le site du constructeur.

En conséquence la maquette numérique réalisée, avec SolidWorks 2019-2020 (SW), est seulement proche du réel. Les dentures des roues 2, 3 et 4 ainsi que la vis sans fin 1 en représentation « réaliste » ne sont pas, géométriquement, correctes.

Afin d'éviter la complexité des arbres de construction la maquette numérique du vérin a été convertie dans un format neutre.

La *fig. 9* montre une image de la maquette numérique du vérin complet et une autre,  $\frac{1}{2}$  carter enlevé et tube de section rectangulaire transparent.

Le vérin destiné à la pelleteuse a été modifié de part la nécessité de placer à l'extrémité du coulisseau un capteur d'effort entre un raccord d'adaptation et une chape mobile.

##### Organisation des dossiers

La *fig. 10* montre l'organisation des dossiers dans Windows.



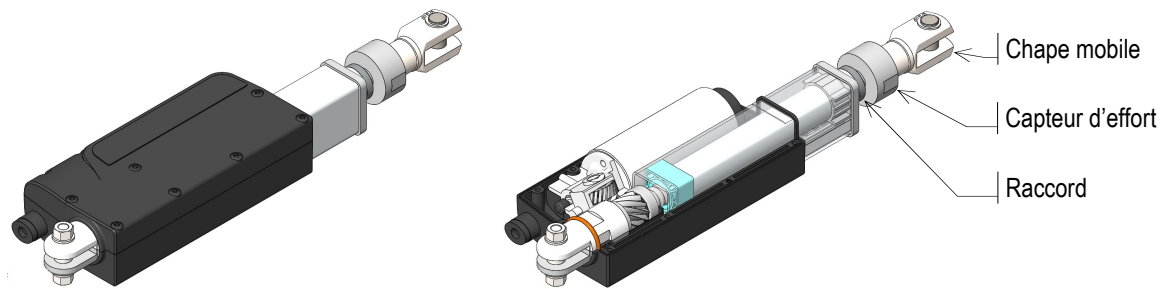


fig. 9 : Images de la maquette numérique du vérin électrique

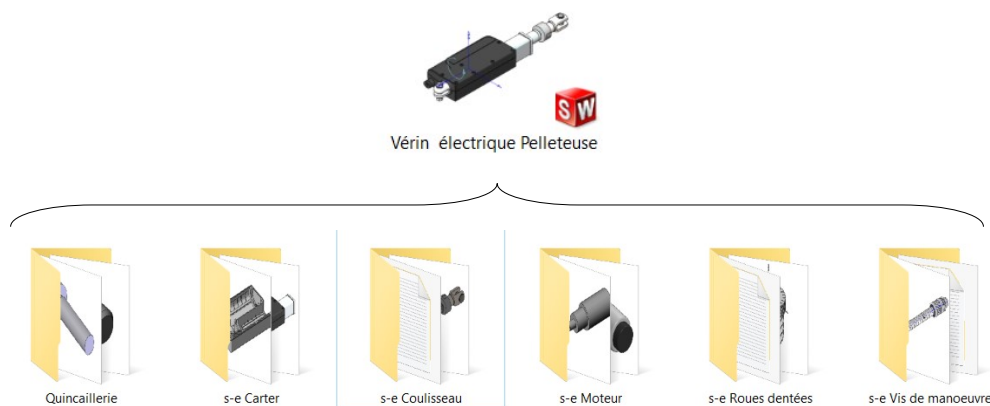


fig. 10 : Organisation des dossiers de la maquette numérique du vérin

### Arbre de construction dans SW

La représentation de l'ensemble des pièces du vérin est structurée en une association de classes d'équivalence (pièces liées complètement ou pièces cinématiquement équivalentes). Ainsi l'arbre de construction de premier niveau du vérin est constitué de cinq sous-ensembles (fig. 11) :

- s-e Carter-0 ;
- s-e Arbre moteur-1 ;
- s-e Roues dentées-2-3 ;
- s-e Vis de manoeuvre-4 ;
- s-e Coulisseau-5 ;

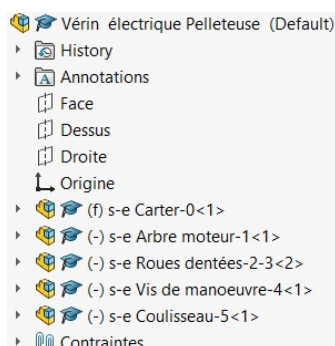


fig. 11 : Arbre de construction de premier niveau dans SW

L'éclaté de la maquette numérique fig. 12 montre les cinq s-e de premier niveau.

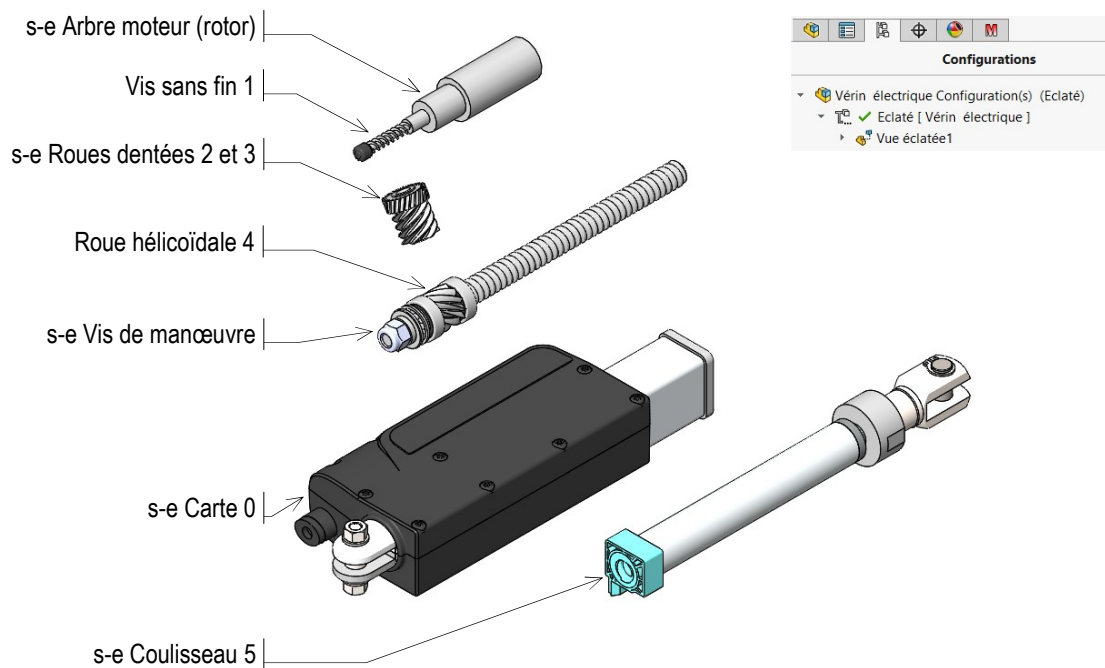


fig. 12 : Eclaté des s-e de premier niveau

La fig. 13 montre la constitution du s-e Carter et la fig. 14 le détail du s-e Glissière.

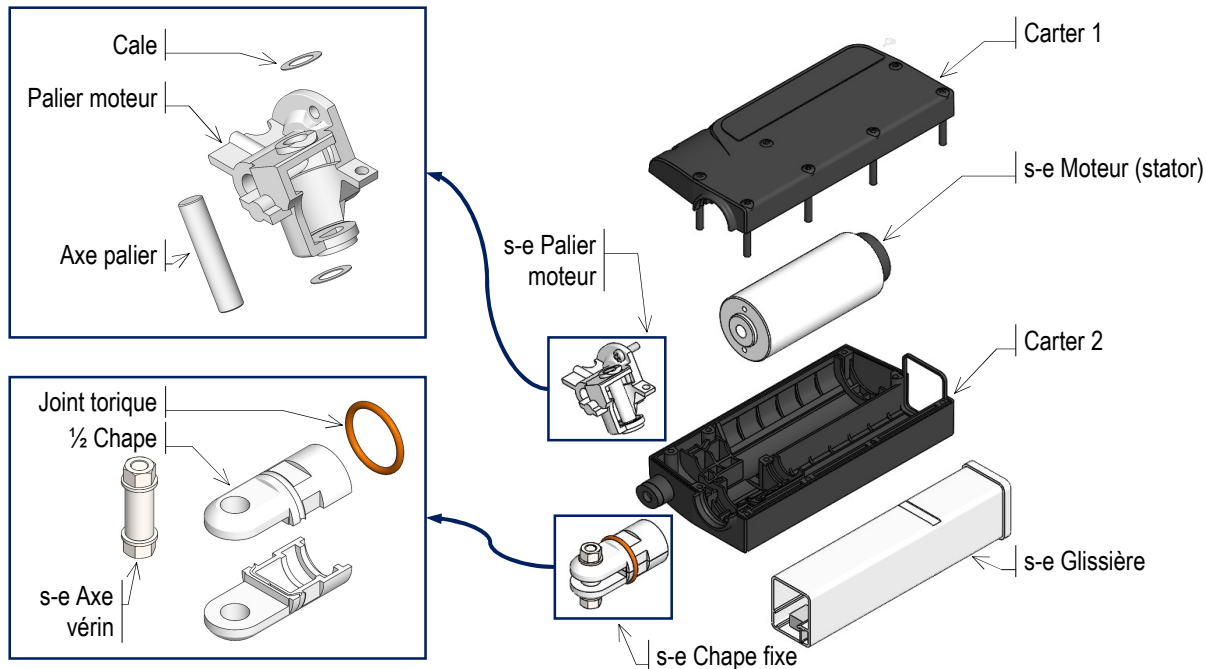
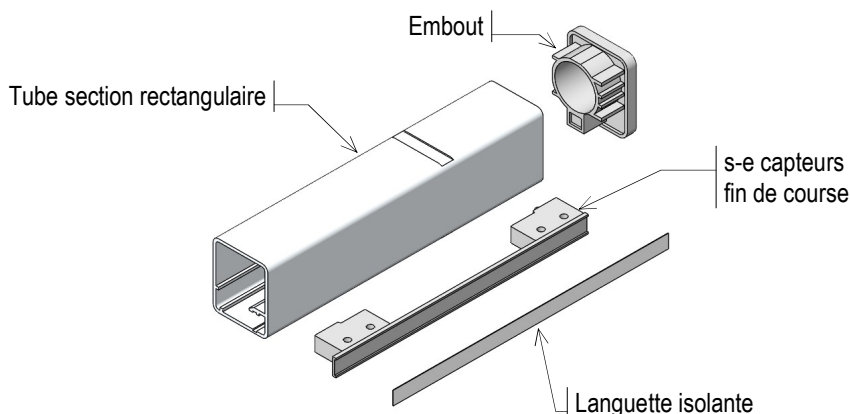


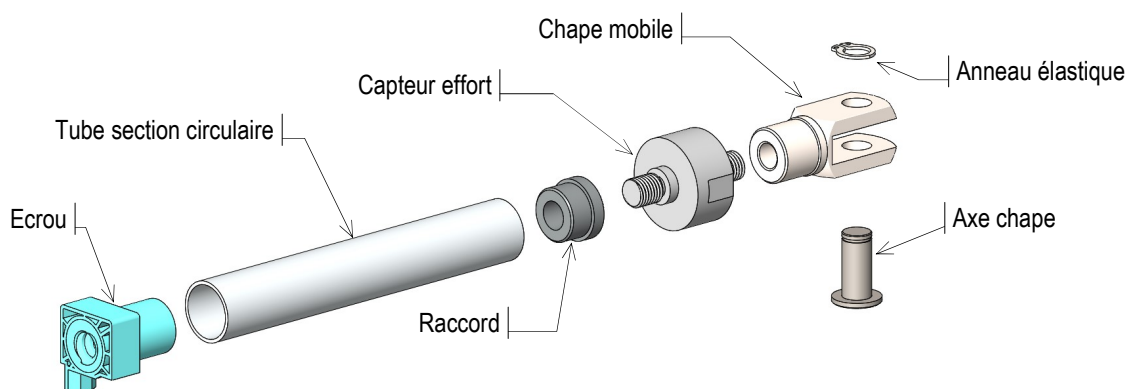
fig. 13 : Eclaté du s-e Carter





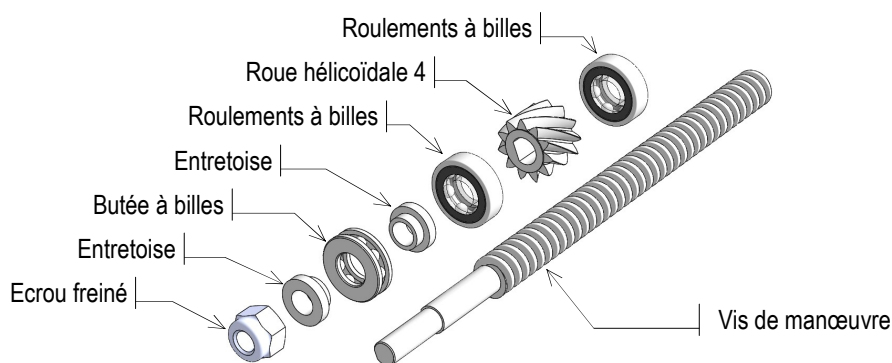
*fig. 14 : Eclaté du s-e Glissière*

La *fig. 15* ci-dessous détaille la constitution du s-e Coulisseau. L'écrou et le raccord sont vissés sur le tube de section circulaire et le capteur d'effort sur le raccord et la chape mobile.



*fig. 15 : Eclaté du s-e Coulisseau*

La *fig. 16* donne la constitution du s-e Vis de manœuvre. En toute rigueur, compte tenu du choix de la construction de la maquette par s-e cinématiquement équivalents, les bagues extérieures des roulements et les rondelles de la butée à billes devraient être liées au s-e carter.

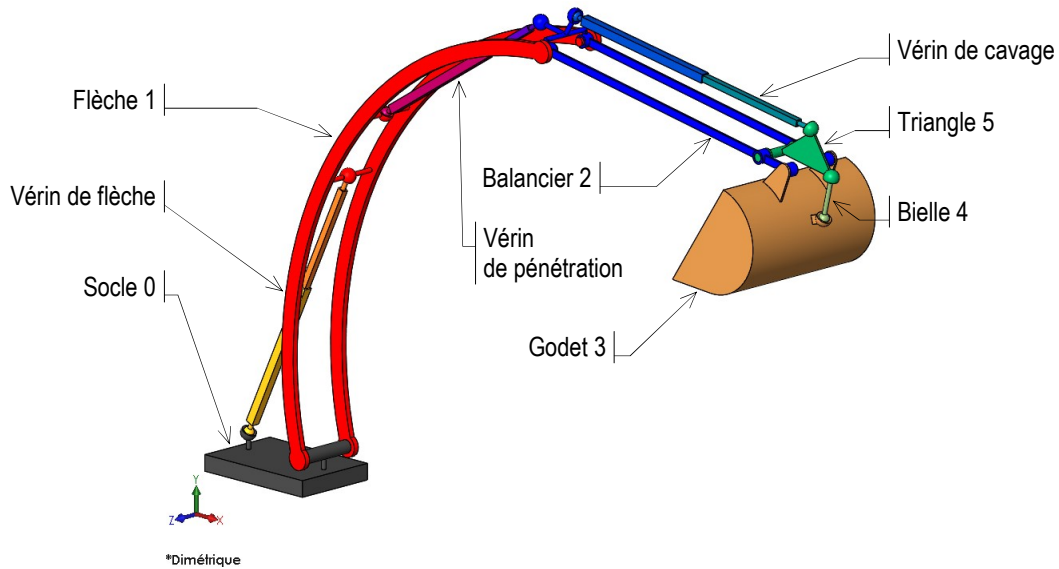


*fig. 16 : Eclaté du s-e Vis de manœuvre*

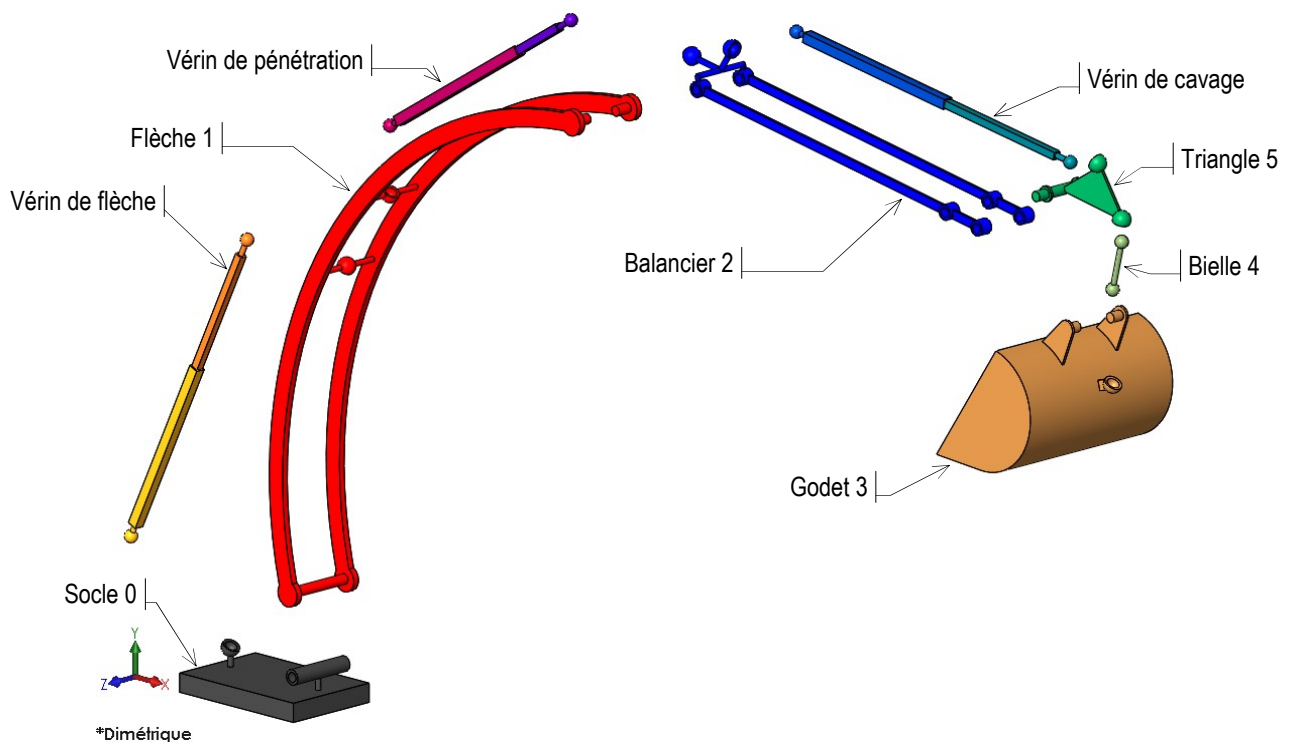
## 1.5 Maquette numérique du schéma cinématique

### 1.5.1 Constitution

Le schéma de la pelleteuse est disponible selon deux versions notées V1 et V2. Le schéma de la pelleteuse électrique, dont l'image de la maquette numérique (version V1) est donnée *fig. 17* et *fig. 18* en éclaté, est constituée essentiellement de six pièces principales (socle compris) et de trois vérins. Chaque vérin est représenté par son corps et son coulisseau. Donc est représenté dans la maquette par une liaison glissière.



*fig. 17 : Schéma de la pelleteuse électrique (version V1)*



*fig. 18 : Eclaté de la maquette (version V1)*

La version V1 est isostatique et la version V2 (*fig. 19*) est hyperstatique comme la Pelleteuse électrique réelle.

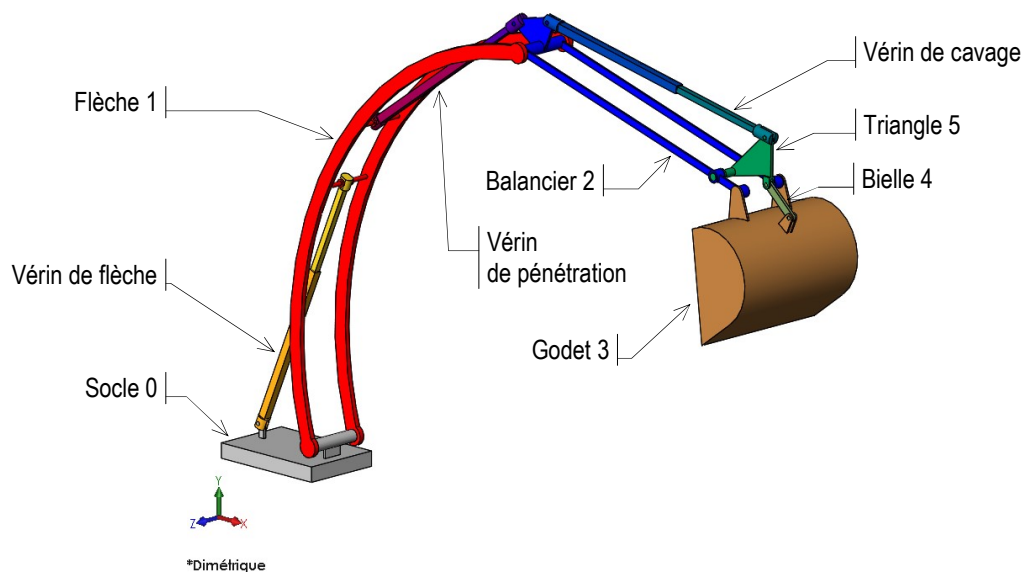


fig. 19 : Schéma version V2

### 1.5.2 Organisation des dossiers et arbre de construction

La fig. 20 donne l'organisation des dossiers dans Windows et la fig. 21 l'arbre de construction du schéma de la maquette dans SolidWorks (2019-2020).

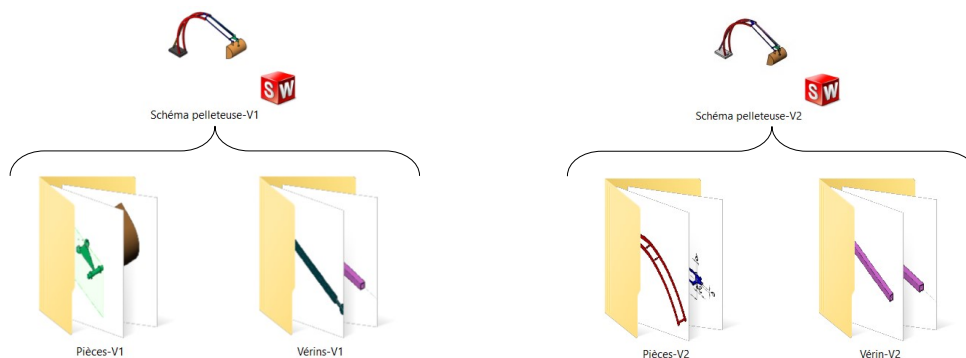


fig. 20 : Arbre de construction de la maquette du schéma de la pelleteuse

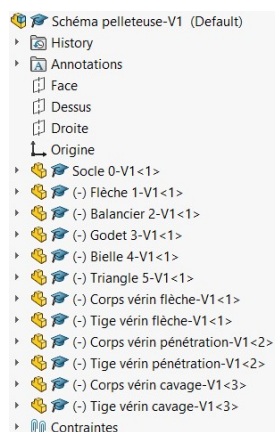


fig. 21 : Arbre de construction de la maquette schématisée

## 1.6 Epure de la pelleteuse

La fig. 22 montre l'épure du bras de pelleteuse dans Solidworks qui autorise des simulations géométrique et cinématique avec Méca3D par exemple.

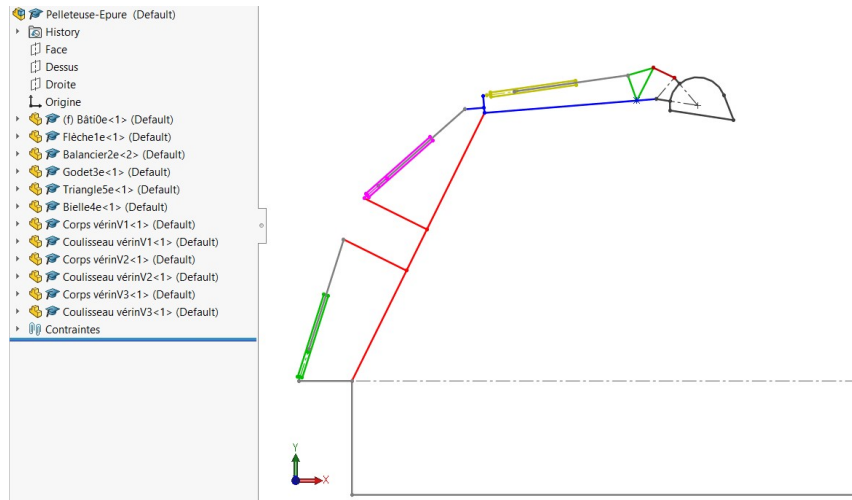


fig. 22 : Epure de la pelleteuse

## 1.7 Schéma cinématique et paramétrage

Le bras de pelleteuse, schématisé fig. 23 est principalement constitué de six solides et de trois vérins (réduits à des liaisons glissières) qui actionnent respectivement la flèche 1, le balancier 2 et le godet 3 via le triangle 5 et la bielle 4.

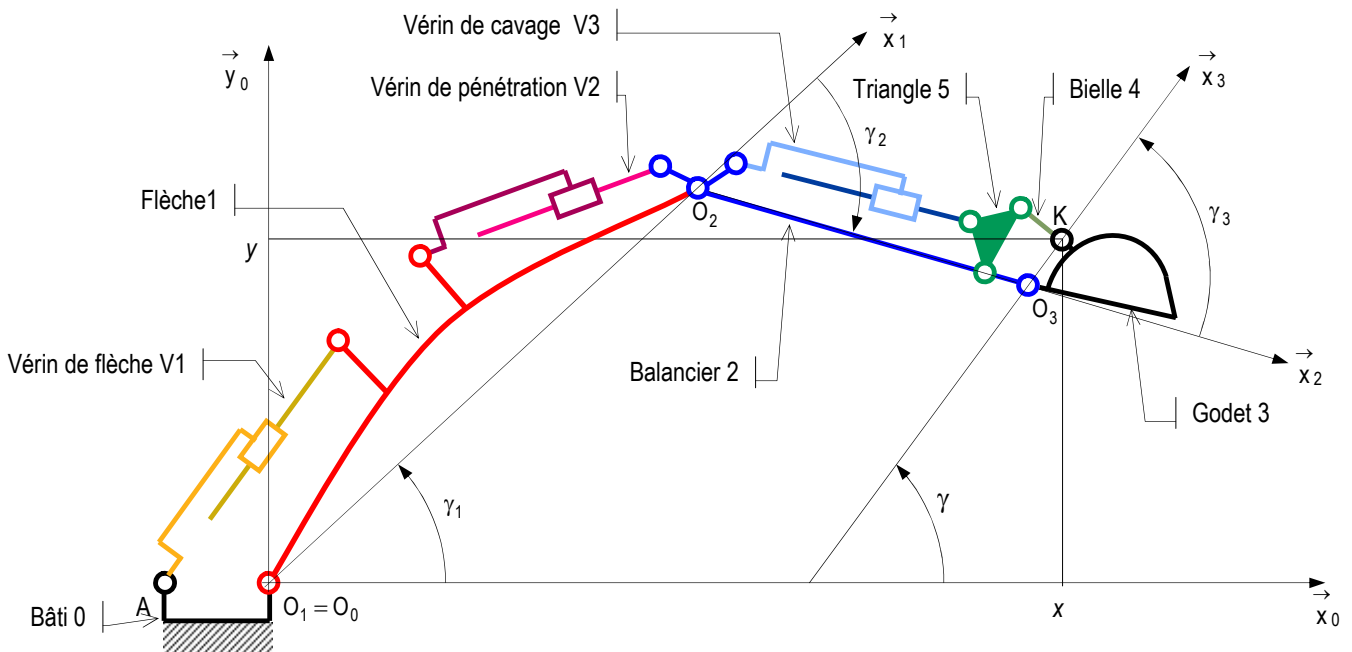


fig. 23

Le repère  $O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  est lié au bâti 0 ;

Le repère  $O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$  est lié à la flèche 1 ;

Le repère  $O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$  est lié au balancier 2 ;

Le repère  $O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$  est lié au godet 3.

La position des centres des liaisons liés aux solides est définie par son vecteur position :

$$\vec{O_0O_1} = \vec{0}$$

$$\vec{O_1O_2} = L_1 \vec{x}_1$$

$$\vec{O_2O_3} = L_2 \vec{x}_2$$

$$\vec{O_3K} = L_3 \vec{x}_3$$

Les trois liaisons pivot montées en série sont définies par les coordonnées dites articulaires de la pelleteuse :

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} \vec{x}_0, \vec{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_0, \vec{y}_1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1, \vec{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_1, \vec{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} \vec{x}_2, \vec{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_2, \vec{y}_3 \end{pmatrix}$$

### Hypothèses générales :

- la pelleteuse évolue dans le plan  $O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  et en conséquence tous les repères orthonormés directs utilisés sont tels que :  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_3 = \dots = \vec{z}$  ;
- Les solides sont indéformables (parfaitement rigides) et les liaisons caractérisées par des variables articulaires sont considérées sans frottement, sans jeux et sans déformations.

### 1.8 Modèle géométrique direct (MGD)

Le modèle géométrique direct (MGD) décrit la position que prend le segment terminal de la structure (effecteur) lorsque la valeur des variables articulaires est connue, c'est-à-dire pour une configuration donnée de la structure. Ce modèle est constitué de l'expression des coordonnées du repère lié au segment terminal dans le repère lié au solide de référence exprimé en fonction des coordonnées articulaires.

La situation de l'effecteur (godet 3) est définie par la position du point K (ou d'un autre point du godet 3) et par l'orientation du godet 3 dans le repère lié au bâti 0 soit :

$$\vec{O_1K} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0$$

et 
$$\gamma = \begin{pmatrix} \vec{x}_0, \vec{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_0, \vec{y}_3 \end{pmatrix}$$

Le MGD est constitué de l'expression des coordonnées du repère lié au godet 3 dans le repère lié au bâti 0 exprimé en fonction des coordonnées articulaires.

La position du point K dans le repère lié au bâti 0 s'exprime à partir de la relation de Chasles :

$$\vec{O_1K} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2O_3} + \vec{O_3K} \quad (1)$$

L'orientation du godet 3 est donnée par la relation de Chasles sur les angles :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0, \vec{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_0, \vec{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_1, \vec{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_2, \vec{x}_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

La relation (1) en conséquence sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  donne

$$\vec{O_1K} \cdot \vec{x}_0 = \vec{O_1O_2} \cdot \vec{x}_0 + \vec{O_2O_3} \cdot \vec{x}_0 + \vec{O_3K} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{O_1K} \cdot \vec{x}_0 = L_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 + L_3 \vec{x}_3 \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{O_1K} \cdot \vec{y}_0 = \vec{O_1O_2} \cdot \vec{y}_0 + \vec{O_2O_3} \cdot \vec{y}_0 + \vec{O_3K} \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{O_1K} \cdot \vec{y}_0 = L_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 + L_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 + L_3 \vec{x}_3 \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{O_1K} \cdot \vec{x}_0 = x = L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$



$$\vec{O_1 K} \cdot \vec{y_0} = y = L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + L_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

La relation (2) donne

$$\left( \begin{matrix} \vec{x_0} \\ \vec{x_3} \end{matrix} \right) = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

Finalement le MGD s'exprime par

$$x = L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \quad (3)$$

$$y = L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + L_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \quad (4)$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \quad (5)$$

### 1.9 Modèle géométrique inverse (MGI)

Si nous désirons piloter la pelleteuse il faut définir le modèle géométrique inverse (MGI). On connaît la position et l'orientation que doit atteindre l'effecteur par rapport au solide de référence. Pour commander l'effecteur il faut connaître la valeur des coordonnées articulaires pour atteindre cette situation c'est-à-dire trouver l'expression des coordonnées articulaires en fonction de la position et de l'orientation de l'organe terminal.

Le MGI consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée du godet 3. Lorsqu'elle existe la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue le MGI.

Les relations (3), (4) et (5) peuvent s'écrire

$$x - L_3 c\gamma = L_1 c\gamma_1 + L_2 c(\gamma_1 + \gamma_2) \quad (6)$$

$$y - L_3 s\gamma = L_1 s\gamma_1 + L_2 s(\gamma_1 + \gamma_2) \quad (7)$$

Les premiers membres sont connus. Posons

$$L_1 c\gamma_1 + L_2 c(\gamma_1 + \gamma_2) = A \quad (8)$$

$$L_1 s\gamma_1 + L_2 s(\gamma_1 + \gamma_2) = B \quad (9)$$

#### • Détermination de $\gamma_2$

(8)<sup>2</sup>+(9)<sup>2</sup> donne (avec  $\cos \alpha \equiv c\alpha$ ,  $\sin \alpha \equiv s\alpha$ ,  $\cos(\alpha_i + \alpha_j) \equiv c(\alpha_i + \alpha_j)$ ,  $\sin(\alpha_i + \alpha_j) \equiv s(\alpha_i + \alpha_j)$ , etc., afin de simplifier l'écriture des relations)

$$A^2 = L_1^2 c^2 \gamma_1 + L_2^2 c^2(\gamma_1 + \gamma_2) + 2L_1 L_2 c\gamma_1 c(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$B^2 = L_1^2 s^2 \gamma_1 + L_2^2 s^2(\gamma_1 + \gamma_2) + 2L_1 L_2 s\gamma_1 s(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$A^2 + B^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 (c\gamma_1 c(\gamma_1 + \gamma_2) + s\gamma_1 s(\gamma_1 + \gamma_2))$$

$$A^2 + B^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 [(c\gamma_1 (c\gamma_1 c\gamma_2 - s\gamma_1 s\gamma_2) + s\gamma_1 (s\gamma_1 c\gamma_2 + c\gamma_1 s\gamma_2))]$$

$$A^2 + B^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 (c^2 \gamma_1 c\gamma_2 - c\gamma_1 s\gamma_1 s\gamma_2 + s^2 \gamma_1 c\gamma_2 + c\gamma_1 s\gamma_1 s\gamma_2)$$

$$A^2 + B^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 c\gamma_2 (c^2 \gamma_1 + s^2 \gamma_1)$$

$$A^2 + B^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 c\gamma_2$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{A^2 + B^2 - (L_1^2 + L_2^2)}{2L_1 L_2}$$

$$\gamma_2 = \pm \arccos \frac{A^2 + B^2 - (L_1^2 + L_2^2)}{2L_1 L_2} \quad (10)$$

#### • Détermination de $\gamma_1$

En développant  $s(\gamma_1 + \gamma_2)$  et  $c(\gamma_1 + \gamma_2)$  dans les relations (8) et (9) on obtient

$$L_1 c\gamma_1 + L_2 (c\gamma_1 c\gamma_2 - s\gamma_1 s\gamma_2) = A$$

$$L_1 s\gamma_1 + L_2 (s\gamma_1 c\gamma_2 + c\gamma_1 s\gamma_2) = B$$

soit

$$(L_1 + L_2 c\gamma_2) c\gamma_1 - L_2 s\gamma_1 s\gamma_2 = A$$

$$L_2 s\gamma_2 c\gamma_1 + (L_1 + L_2 c\gamma_2) s\gamma_1 = B$$

Connaissant  $\gamma_2$  on obtient ainsi un système à deux inconnues  $s\gamma_1$  et  $c\gamma_1$  alors

$$c\gamma_1 = \frac{A(L_1 + L_2 c\gamma_2) + B L_2 s\gamma_2}{(L_1 + L_2 c\gamma_2)^2 + (L_2 s\gamma_2)^2} \quad \text{et} \quad s\gamma_1 = \frac{B(L_1 + L_2 c\gamma_2) - A L_2 s\gamma_2}{(L_1 + L_2 c\gamma_2)^2 + (L_2 s\gamma_2)^2}$$

D'où 
$$\tan \gamma_1 = \frac{B(L_1 + L_2 \cos \gamma_2) - AL_2 \sin \gamma_2}{A(L_1 + L_2 \cos \gamma_2) + BL_2 \sin \gamma_2}$$

et 
$$\gamma_1 = \arctan 2 \left( \frac{B(L_1 + L_2 \cos \gamma_2) - AL_2 \sin \gamma_2}{A(L_1 + L_2 \cos \gamma_2) + BL_2 \sin \gamma_2} \right) \quad (11)$$

• Détermination de  $\gamma_3$

D'après (5) 
$$\gamma_3 = \gamma - \gamma_1 - \gamma_2 \quad (12)$$

Finalement les équations (10), (11) et (12) constituent le MGI avec d'après (6), (7), (8) et (9)

$$A = x - L_3 \cos \gamma \quad (13)$$

$$B = y - L_3 \sin \gamma \quad (14)$$

### 1.10 Cas du porteur seul constitué de la flèche 1 et du balancier 2

On considère le porteur seul constitué de la flèche 1 et du balancier 2 (le godet 3 est piloté indépendamment).

Soit la position du point  $O_3$  dans le repère lié au bâti 0 :

$$\vec{O_1 O_3} = x_3 \vec{x_0} + y_3 \vec{y_0}$$

#### 1.10.1 MGD

Les équations (3) et (4) deviennent

$$\vec{O_1 O_3} \cdot \vec{x_0} = x_3 = L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\vec{O_1 O_3} \cdot \vec{y_0} = y_3 = L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2)$$

#### 1.10.2 MGI

Les équations (10) et (11) deviennent

$$\cos \gamma_2 = \frac{x_3^2 + y_3^2 - (L_1^2 + L_2^2)}{2 L_1 L_2}$$

$$\gamma_2 = \pm \arccos \left( \frac{x_3^2 + y_3^2 - (L_1^2 + L_2^2)}{2 L_1 L_2} \right)$$

$$\tan \gamma_1 = \frac{y_3 (L_1 + L_2 \cos \gamma_2) - x_3 L_2 \sin \gamma_2}{x_3 (L_1 + L_2 \cos \gamma_2) + y_3 L_2 \sin \gamma_2}$$

$$\gamma_1 = \arctan 2 \left( \frac{y_3 (L_1 + L_2 \cos \gamma_2) - x_3 L_2 \sin \gamma_2}{x_3 (L_1 + L_2 \cos \gamma_2) + y_3 L_2 \sin \gamma_2} \right)$$

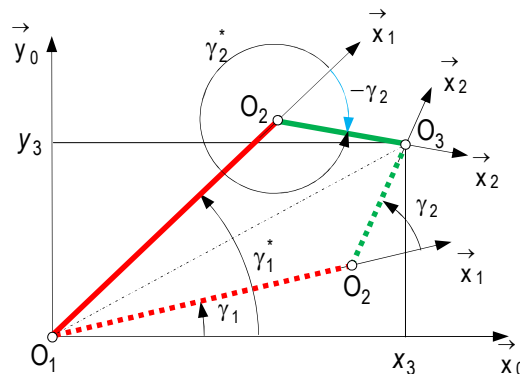


fig. 24 : Configurations de la flèche 1 et du balancier 2

On remarque (fig. 24) qu'il y a deux solutions, correspondant à deux postures différentes du bras 2 (sous réserve qu'il n'y ait pas de butées sur les articulations). La position du point  $O_3$  dans le repère lié au bâti 0 peut être atteinte avec le couple d'angles  $\gamma_1, \gamma_2$  ou avec  $\gamma_1^*, \gamma_2^*$  (ou  $-\gamma_2$ ). La situation représentée en pointillés n'est pas exploitée.

Remarques :

- l'angle  $\gamma_2$  peut aussi être trouvé en appliquant le théorème de Pythagore généralisé ;
- connaissant  $\gamma_2$  le système d'équations à deux inconnues  $s_{\gamma_1}$  et  $c_{\gamma_1}$  peut être résolu en utilisant la méthode de Cramer via le déterminant du système.

### 1.11 Génération de mouvement point à point avec une trajectoire imposée

#### Équation d'une trajectoire du point $O_3$

Par exemple le point  $O_3$  se déplace selon le segment de droite  $O_{3i}O_{3f}$  (fig. 25). L'équation de la trajectoire est définie par :

- la pente  $a$  de la droite  $\frac{y_{3f} - y_{3i}}{x_{3f} - x_{3i}} = a$

$$y_3 = \frac{y_{3f} - y_{3i}}{x_{3f} - x_{3i}} x_3 + b$$

- l'ordonnée à l'origine :

$$y_{3f} = \frac{y_{3f} - y_{3i}}{x_{3f} - x_{3i}} x_{3f} + b$$

$$b = y_{3f} - \frac{y_{3f} - y_{3i}}{x_{3f} - x_{3i}} x_{3f} = \frac{x_{3f}y_{3i} - x_{3i}y_{3f} - x_{3f}y_{3f} + x_{3f}y_{3i}}{x_{3f} - x_{3i}}$$

Finalement 
$$y_3 = \frac{y_{3f} - y_{3i}}{x_{3f} - x_{3i}} x_3 + \frac{x_{3f}y_{3i} - x_{3i}y_{3f}}{x_{3f} - x_{3i}}$$

#### Application numérique :

$$L_1 = 520\text{mm}$$

$$L_2 = 300\text{mm}$$

On se donne  $x_{3i} = 530\text{mm}$

$$y_{3i} = 490\text{mm}$$

$$x_{3f} = 715\text{mm}$$

$$y_{3f} = 10\text{mm}$$

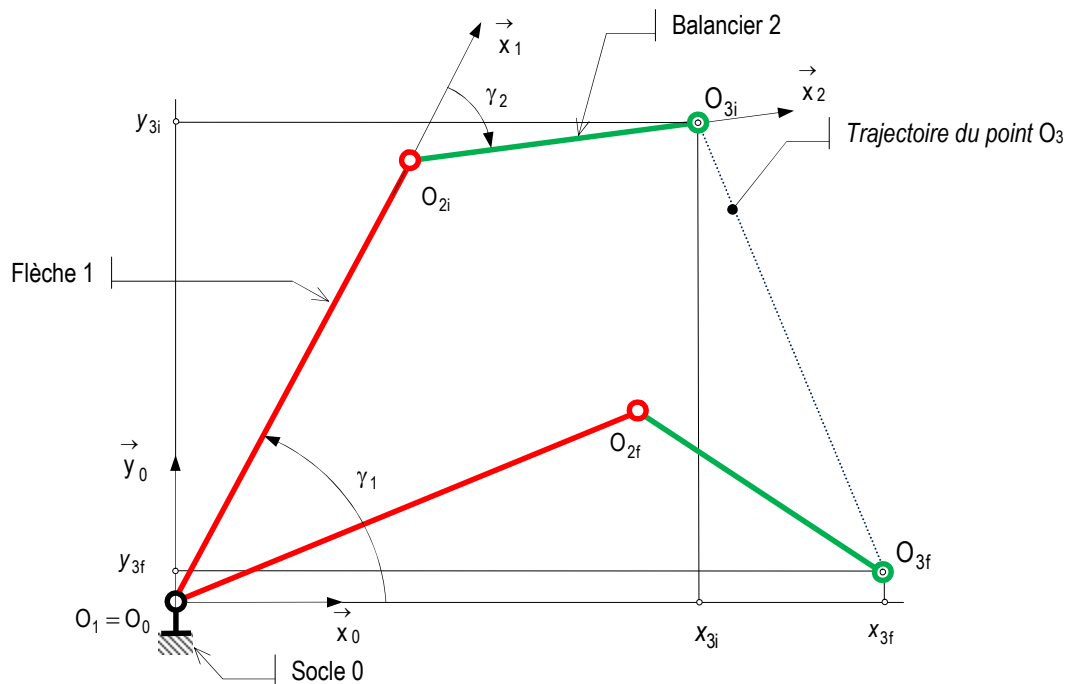


fig. 25 : Situations initiale et finale de 1 et 2

La durée de déplacement est de 4,6 s (choix arbitraire).

Les expressions de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  trouvées au § 1.9 permettent d'obtenir les courbes fig. 26. L'angle  $\gamma_3$  est géré indépendamment des deux autres. Les calculs sont consignés dans le fichier Excel « mvt point à point », feuille « angles ».

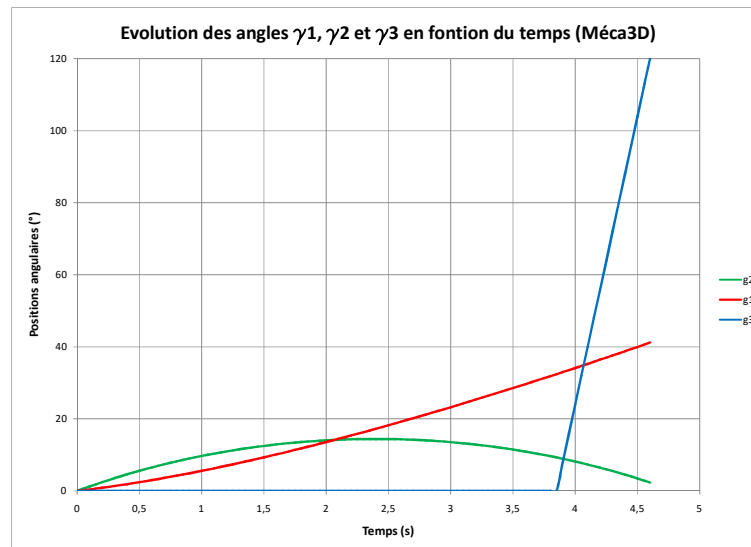


fig. 26

La fig. 27 donne le résultat dans Solidworks après simulation avec Méca3D.

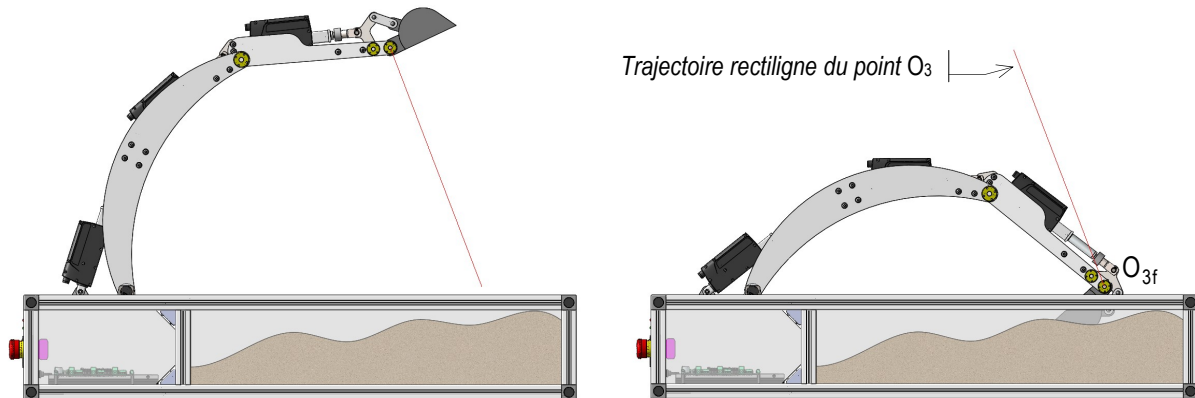


fig. 27 : : Situations initiale et finale du bras et trajectoire du point  $O_3$

## 1.12 Paramètres géométriques des solides

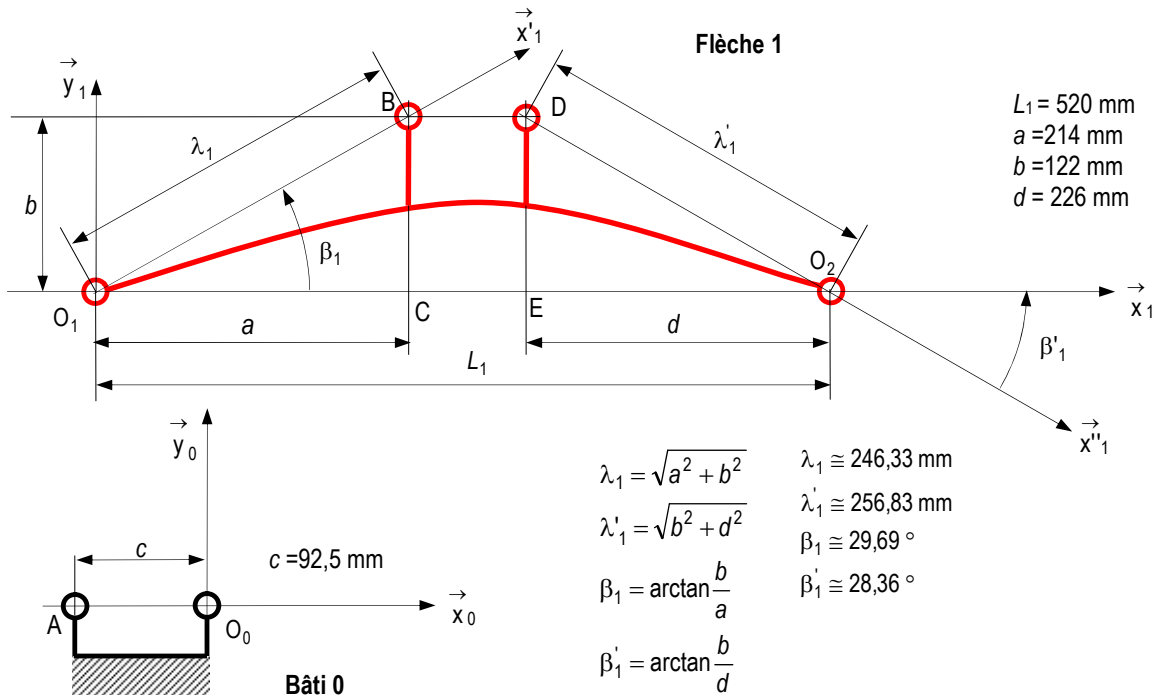


fig. 28 : Paramètres géométriques de la flèche et du bâti

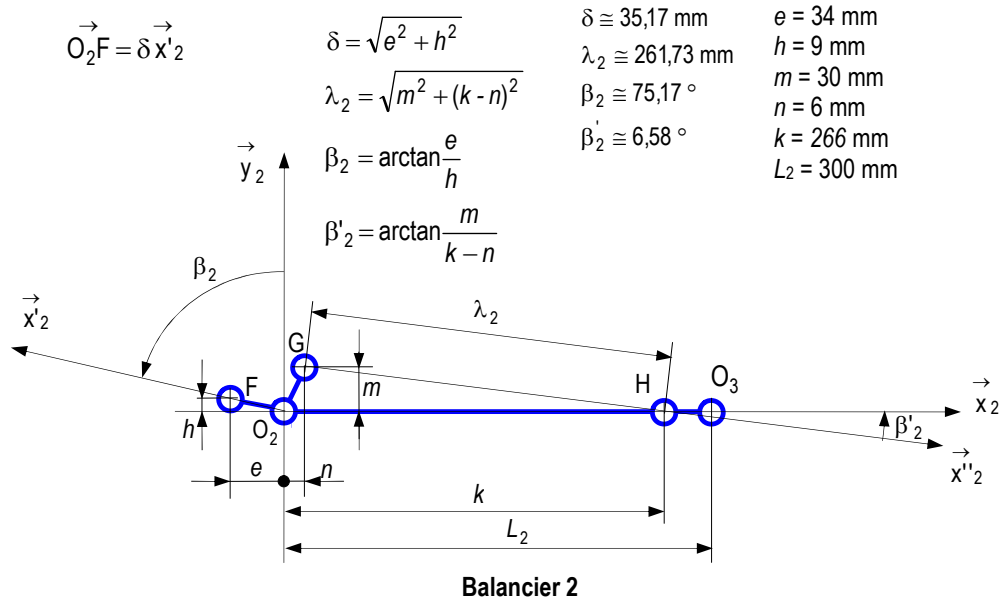


fig. 29 : Paramètres géométriques du balancier



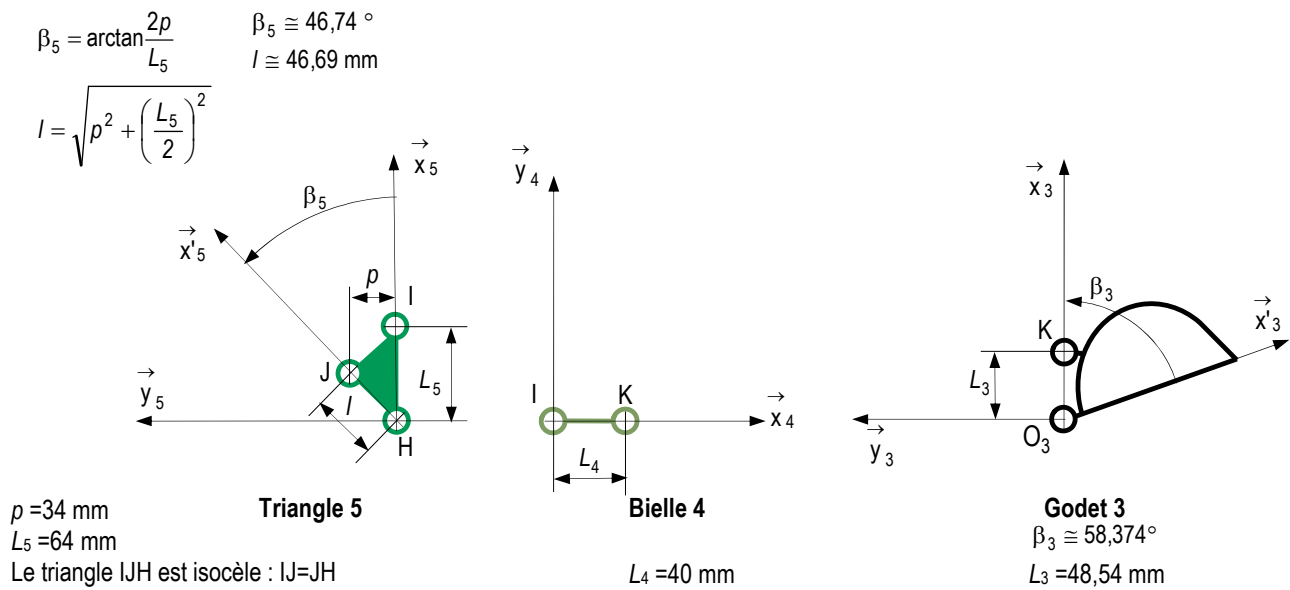


fig. 30 : Paramètres géométriques du triangle, de la bielle et du godet

Le vérin initial fourni par le constructeur fig. 31 a une longueur comprise entre 195 mm et 275 mm soit une course de 80 mm. Le vérin destiné à la pelleteuse et équipé d'un capteur d'effort a une longueur comprise entre 233 mm et 313 mm.

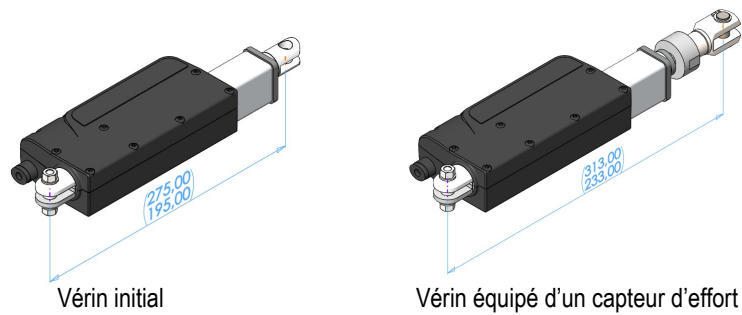


fig. 31 : Longueurs des vérins

### 1.13 Entrée-sortie géométrique vérin de flèche-flèche

La longueur du vérin de flèche V1 peut être calculée (fig. 32) à partir de :

$$\vec{AB} = \vec{AO_1} + \vec{O_1B}$$

Avec  $\vec{O_1B} = \lambda_1 \vec{x'_1}$

$$\vec{O_1A} = -c \vec{x_0}$$

$$\vec{AB} = l_1 \vec{x_{v1}} \text{ (longueur du vérin de flèche)}$$

$$(\vec{AB})^2 = (\vec{AO_1})^2 + (\vec{O_1B})^2 + 2\vec{AO_1} \cdot \vec{O_1B}$$

$$l_1^2 = c^2 + \lambda_1^2 + 2c\lambda_1 \vec{x_0} \cdot \vec{x'_1}$$

Soit  $l_1 = \sqrt{c^2 + \lambda_1^2 + 2c\lambda_1 \cos(\gamma_1 + \beta_1)}$

En posant  $\vec{O_1C} = a \vec{x_1}$  si C est la projection orthogonale de B sur  $O_1; \vec{x_1}$

$$\vec{CB} = b \vec{y_1}$$

Alors  $\lambda_1^2 = a^2 + b^2$   $\lambda_1$  est constant

D'autre part  $\beta_1 = \arctan \frac{b}{a}$   $\beta_1$  est constant

L'angle  $\gamma_1$  en fonction de  $l_1$  s'exprime à partir de :

$$\cos(\gamma_1 + \beta_1) = \frac{l_1^2 - c^2 - \lambda_1^2}{2c\lambda_1}$$

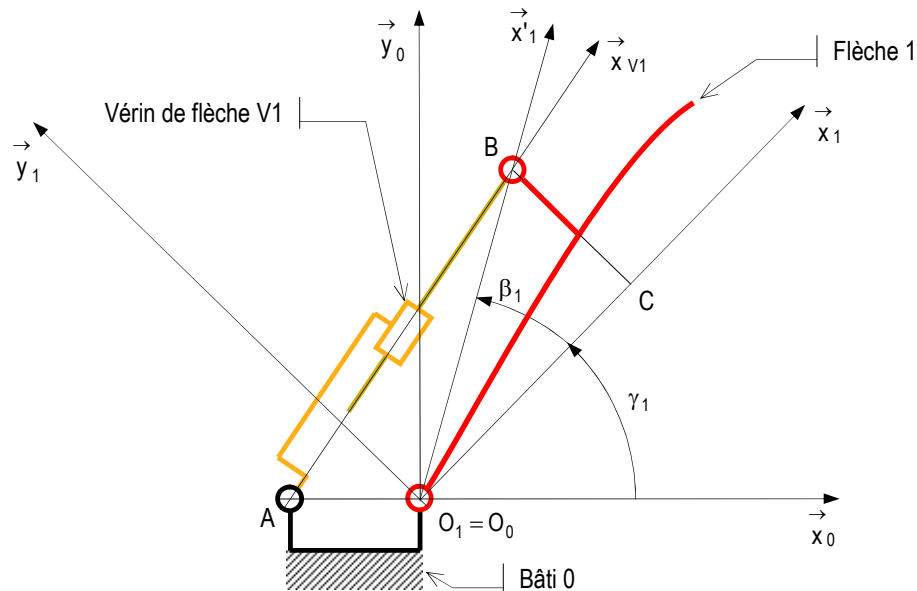


fig. 32

### Application numérique :

Le vérin de flèche V1 a une course de 80 mm (donnée constructeur) et  $233\text{mm} \leq l_1 \leq 313\text{mm}$ .

Les relations ci-dessus ont été vérifiées dans Excel (fichier « Modélisation géométrique-cinématique ») et avec Méca3D dans la maquette partielle « Bâti-Flèche-VérinV1 » (fig. 33 et fig. 34).



fig. 33

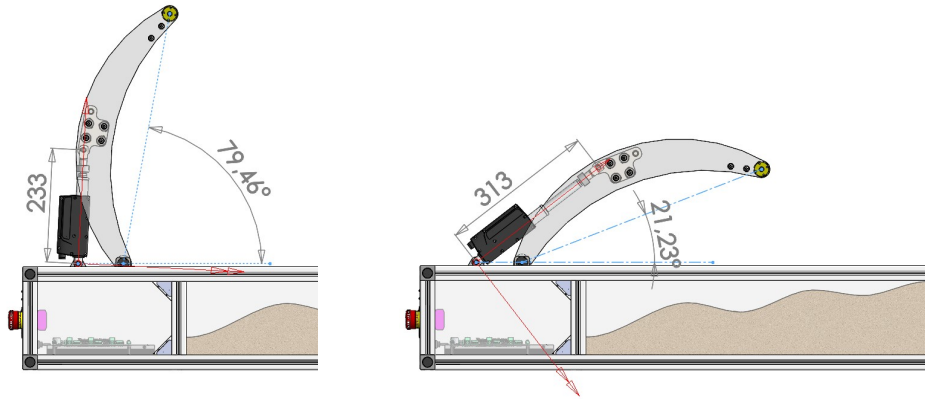


fig. 34

### 1.14 Entrée-sortie géométrique vérin de pénétration-balancier

La longueur du vérin de pénétration V2 peut être calculée à partir de (fig. 35) :

$$\vec{DF} = \vec{DO_2} + \vec{O_2F}$$

avec  $\vec{O_2F} = \delta \vec{x}'_2$

$$\vec{DO_2} = \lambda'_1 \vec{x}''_1$$

$$\vec{DF} = l_2 \vec{x}_{V2} \text{ (longueur du vérin de pénétration)}$$

$$(\vec{DF})^2 = (\vec{DO_2})^2 + (\vec{O_2F})^2 + 2\vec{DO_2} \cdot \vec{O_2F}$$

$$l_2^2 = \lambda_1'^2 + \delta^2 + 2\lambda_1' \delta \vec{x}''_1 \cdot \vec{x}'_2$$

$$l_2^2 = \lambda_1'^2 + \delta^2 + 2\lambda_1' \delta \vec{x}''_1 \cdot \vec{x}'_2$$

$$\left( \vec{x}'_1, \vec{x}'_2 \right) = \underbrace{\left( \vec{x}''_1, \vec{x}_1 \right)}_{=\beta'_1} + \underbrace{\left( \vec{x}_1, \vec{x}_2 \right)}_{=\gamma_2} + \underbrace{\left( \vec{x}_2, \vec{y}_2 \right)}_{=\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\left( \vec{y}_2, \vec{x}'_2 \right)}_{=\beta_2}$$

$$l_2^2 = \lambda_1'^2 + \delta^2 - 2\lambda_1' \delta \sin(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2)$$

$$l_2 = \sqrt{\lambda_1'^2 + \delta^2 - 2\lambda_1' \delta \sin(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2)}$$

En posant  $\vec{EO_2} = d \vec{x}_1$  si E est la projection orthogonale de D sur  $O_1; \vec{x}_1$

$$\vec{ED} = b \vec{y}_1$$

alors  $\lambda_1'^2 = b^2 + d^2$

Avec  $\vec{O_2F} = h \vec{y}_2 - e \vec{x}_2$

$$\delta^2 = h^2 + e^2$$

$$\tan \beta'_1 = \frac{b}{d}$$

$$\tan \beta_2 = \frac{e}{h}$$

L'angle  $\gamma_2$  en fonction de  $l_2$  s'exprime à partir de :

$$\sin(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2) = \frac{\lambda_1'^2 + \delta^2 - l_2^2}{2\lambda_1' \delta}$$

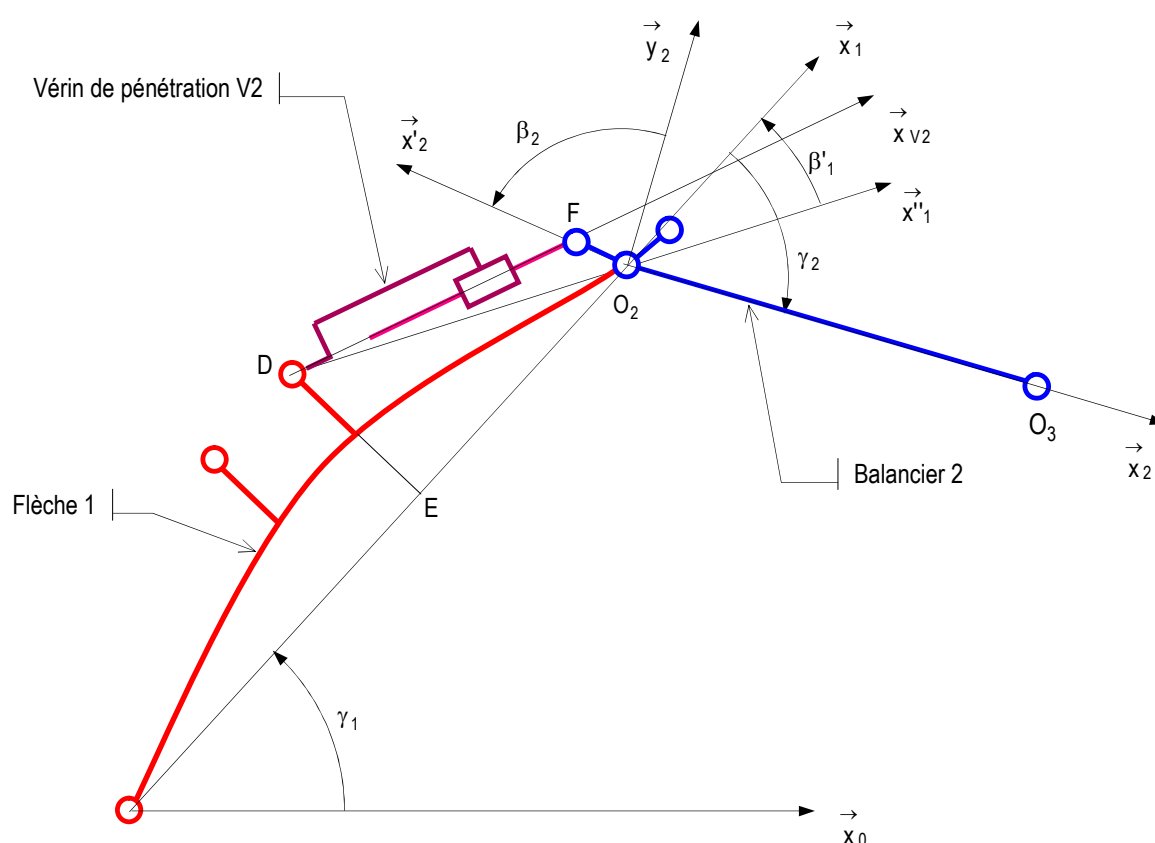


fig. 35

#### Application numérique :

La course du vérin de pénétration est limitée à 42 mm afin d'empêcher la collision de la chape de la tige du vérin avec le balancier et  $233\text{ mm} \leq l_2 \leq 275\text{ mm}$ .

Les relations ci-dessus ont été vérifiées dans Excel (fichier « Modélisation géométrique-cinématique ») et avec Méca3D dans la maquette partielle « Flèche-Balancier-VérinV2 » (fig. 36 et fig. 37).

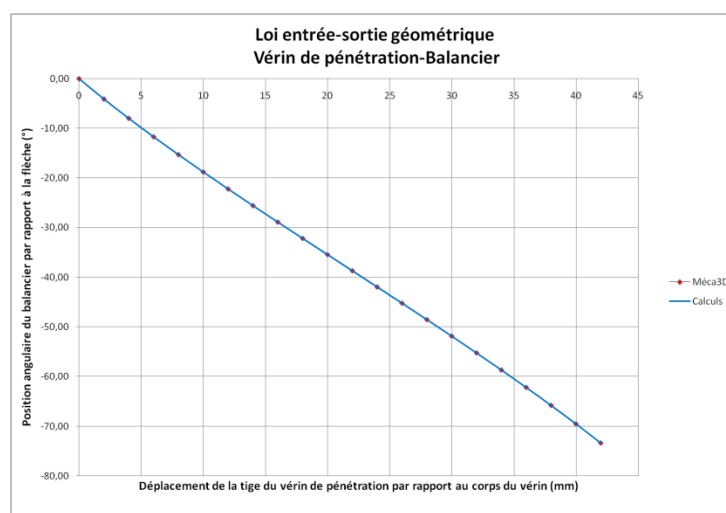


fig. 36

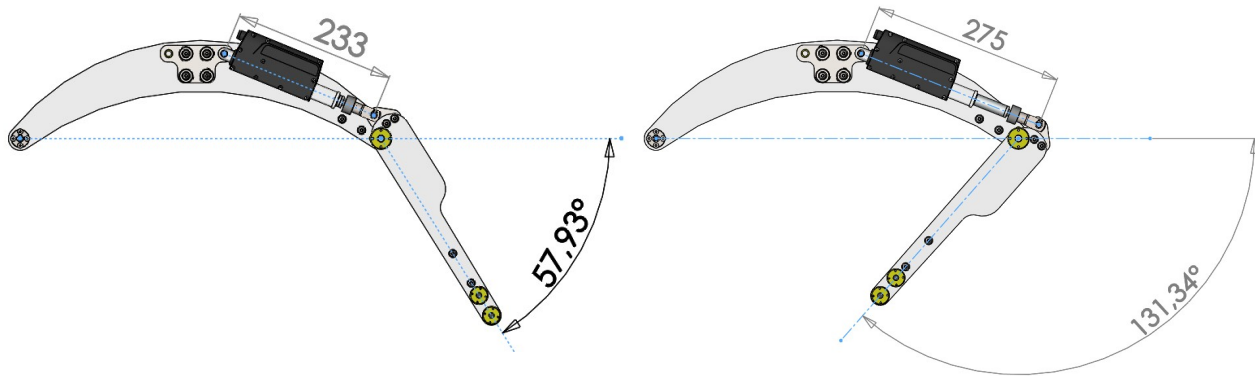


fig. 37

### 1.15 Entrée-sortie géométrique vérin de cavage-triangle

La longueur du vérin V3 peut être déterminée à partir de (fig. 38) :

$$\vec{GJ} = \vec{GH} + \vec{HJ}$$

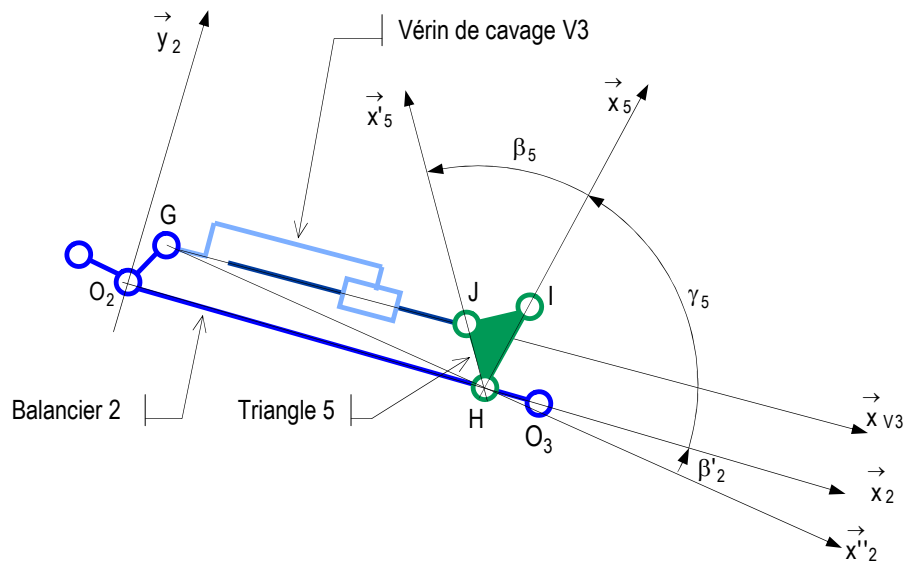


fig. 38

avec  $\vec{GJ} = l_3 \vec{x}_{V3}$  (longueur du vérin de cavage)

$$\vec{GH} = \lambda_2 \vec{x}''_2$$

$$\vec{HJ} = l \vec{x}'_5$$

$$(\vec{GJ})^2 = (\vec{GH})^2 + (\vec{HJ})^2 + 2\vec{GH} \cdot \vec{HJ}$$

$$l_3^2 = \lambda_2^2 + l^2 + 2\lambda_2 l \vec{x}''_2 \cdot \vec{x}'_5$$

avec 
$$\left( \vec{x}''_2, \vec{x}'_5 \right) = \underbrace{\left( \vec{x}''_2, \vec{x}_2 \right)}_{=\beta'_2} + \underbrace{\left( \vec{x}_2, \vec{x}_5 \right)}_{=\gamma_5} + \underbrace{\left( \vec{x}_5, \vec{x}'_5 \right)}_{=\beta_5}$$

$$\beta'_2 = \left( \vec{x}''_2, \vec{x}_2 \right) \text{ est constant}$$



$$\beta_5 = \left( \vec{x}_5, \vec{x}'_5 \right) \text{ est constant}$$

$$l_3 = \sqrt{\lambda_2^2 + l^2 + 2\lambda_2 l \cos(\gamma_5 + \beta_5 + \beta'_2)}$$

De  $\vec{O}_2 G = n \vec{x}_2 + m \vec{y}_2$

et  $\vec{O}_2 H = k \vec{x}_2$

$$\lambda_2 = \sqrt{m^2 + (k - n)^2} \text{ est constant}$$

$$HI = L_5 \vec{x}_5 \text{ et } l = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{L_5}{2}\right)^2} \text{ est constant}$$

$$\tan \beta_5 = \frac{2\rho}{L_5} \text{ et } \tan \beta'_2 = \frac{m}{k - n}$$

#### Application numérique :

La course du vérin de cavage est limitée par la course angulaire du triangle qui doit être comprise entre 0 et 78° afin d'empêcher les collisions avec les pièces adjacentes. En conséquence  $233,55 \text{ mm} \leq l_2 \leq 292,03 \text{ mm}$ .

Les relations ci-dessus ont été vérifiées dans Excel (fichier « Modélisation géométrique-cinématique ») et avec Méca3D dans la maquette partielle « Balancier-Triangle-VérinV3 » (fig. 39 et fig. 40).

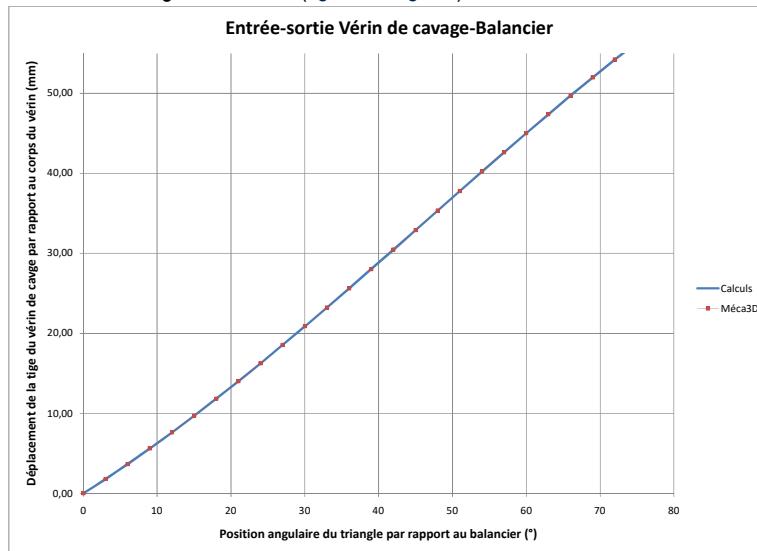


fig. 39

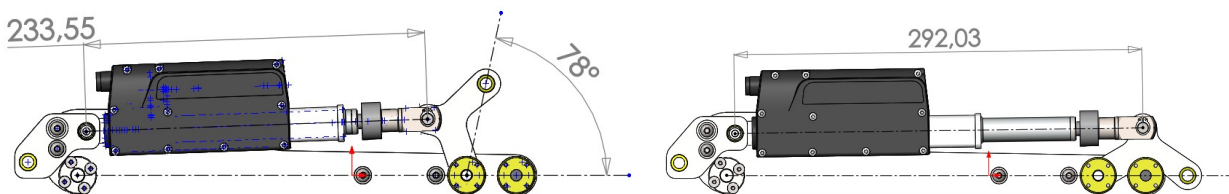


fig. 40

### 1.16 Entrée-sortie géométrique triangle-godet

#### 1.16.1 Méthode 1

La fig. 41 montre la géométrie du contour IHO<sub>3</sub>K et la fig. 42 le même polygone agrandi et légèrement déformé pour faciliter les calculs.

- pour le contour HIO<sub>3</sub>

$$\vec{HO}_3 + \vec{O}_3I + \vec{IH} = \vec{0}$$

Avec

$$\vec{HI} = L_5 \vec{x}_5$$

$$\vec{HO}_3 = (L_2 - k) \vec{x}_2$$

$$\vec{O}_3I = s \vec{x}_s$$

La relation vectorielle en projection sur  $\vec{y}_2$  donne :

$$(L_2 - k) \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_2 + s \vec{x}_s \cdot \vec{y}_2 - L_5 \vec{x}_5 \cdot \vec{y}_2 = 0$$

$$s \sin \varphi - L_5 \sin \gamma_5 = 0$$

$$\sin \varphi = \frac{L_5 \sin \gamma_5}{s}$$

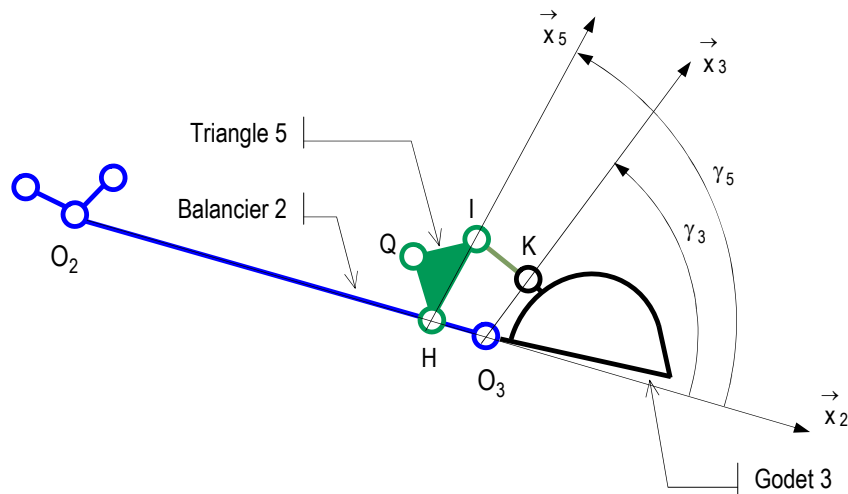


fig. 41

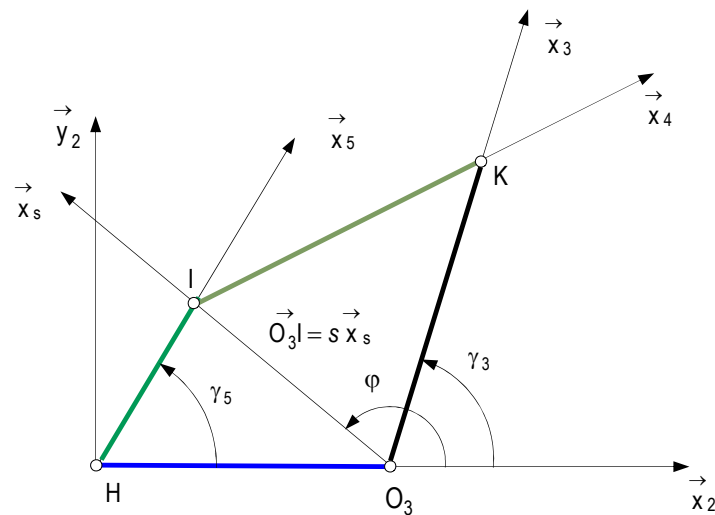


fig. 42

- pour le contour  $KO_3I$

$$\vec{KI} = \vec{KO}_3 + \vec{O}_3I$$

En élevant cette expression au carré avec

$$\vec{IK} = L_4 \vec{x}_4$$

$$\vec{O_3K} = L_3 \vec{x}_3$$

$$\vec{O_3I} = s \vec{x}_s$$

$$L_4^2 = s^2 + L_3^2 - 2sL_3 \vec{x}_3 \cdot \vec{x}_s$$

$$L_4^2 = s^2 + L_3^2 - 2sL_3 \cos(\varphi - \gamma_3)$$

$$\cos(\varphi - \gamma_3) = \frac{s^2 + L_3^2 - L_4^2}{2sL_3}$$

$$\gamma_3 = \varphi - \arccos \frac{s^2 + L_3^2 - L_4^2}{2sL_3}$$

La valeur de s est obtenue par résolution du triangle IO<sub>3</sub>H

$$s^2 = (L_2 - k)^2 + L_5^2 - 2(L_2 - k)L_5 \cos \gamma_5$$

Finalement 
$$\gamma_3 = \arctan \frac{L_5 \sin \gamma_5}{L_5 \cos \gamma_5 - (L_2 - k)} - \arcsin \frac{L_5 \sin \gamma_5}{s}$$

$$\gamma_3 = \arctan \frac{L_5 \sin \gamma_5}{L_5 \cos \gamma_5 - (L_2 - k)} - \arcsin \frac{L_5 \sin \gamma_5}{\sqrt{(L_2 - k)^2 + L_5^2 - 2L_2 L_5 \cos \gamma_5}}$$

#### Application numérique :

L'amplitude du déplacement angulaire du triangle 5 est  $0 \leq \gamma_5 \leq 78^\circ$ . En conséquence l'amplitude de déplacement du godet 3 est  $-55,34^\circ \leq \gamma_3 \leq 71,16^\circ$ .

Les relations ci-dessus ont été vérifiées dans Excel (fichier « Modélisation géométrique-cinématique ») et avec Méca3D dans la maquette partielle « Balancier-Triangle-VérinV3 » (fig. 43 et fig. 44).

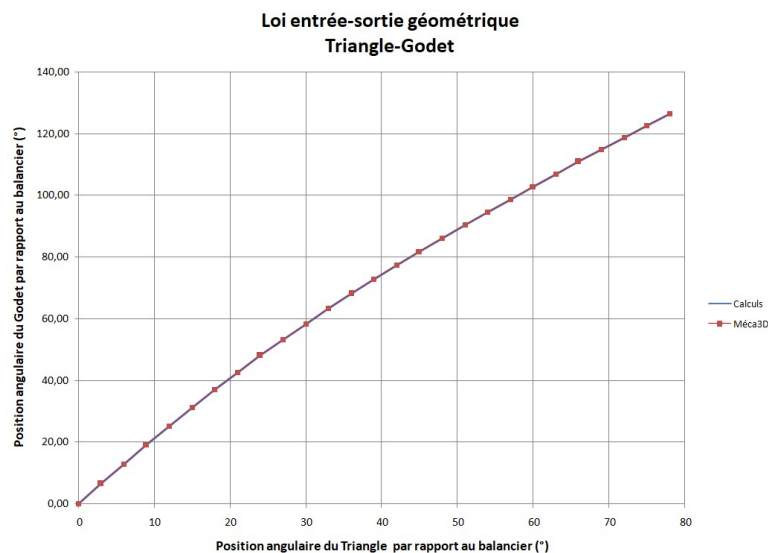


fig. 43

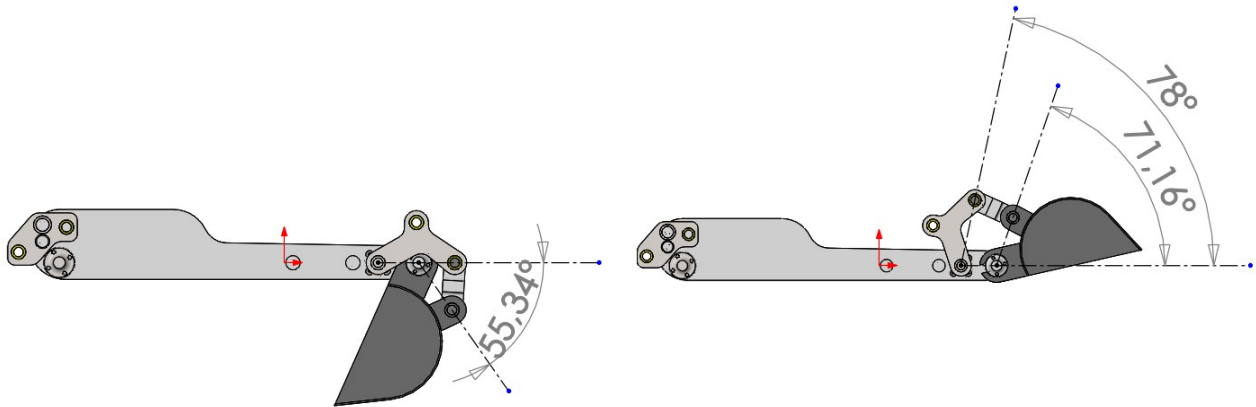


fig. 44

### 1.16.2 Méthode 2

A partir de  $\vec{IK} = \vec{IH} + \vec{HO}_3 + \vec{O}_3\vec{K}$

avec  $\vec{IK} = L_4 \vec{x}_4$

$\vec{IH} = -L_5 \vec{x}_5$

$\vec{HO}_3 = (L_2 - k) \vec{x}_2$

$\vec{O}_3\vec{K} = L_3 \vec{x}_3$

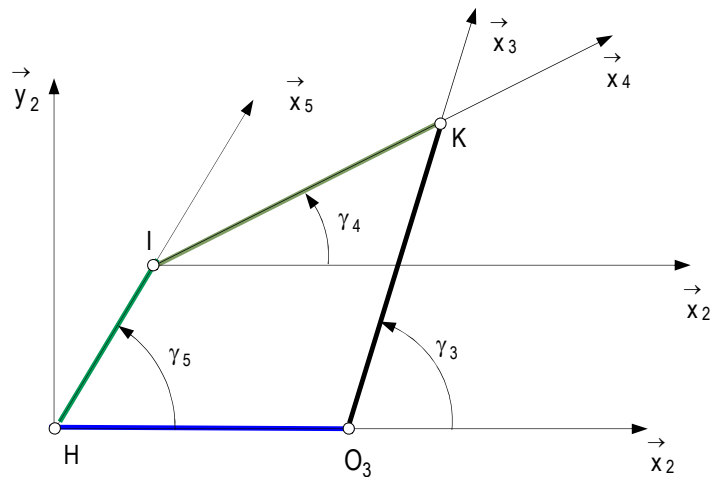


fig. 45

En conséquence sur  $\vec{x}_2$  et  $\vec{y}_2$  la relation vectorielle donne :

$$L_4 \cos \gamma_4 = -L_5 \cos \gamma_5 + (L_2 - k) + L_3 \cos \gamma_3$$

$$L_4 \sin \gamma_4 = -L_5 \sin \gamma_5 + L_3 \sin \gamma_3$$

Elevons au carré ces deux expressions :

$$L_4^2 \cos^2 \gamma_4 = L_5^2 \cos^2 \gamma_5 + (L_2 - k)^2 + L_3^2 \cos^2 \gamma_3 - 2L_5(L_2 - k) \cos \gamma_5 - 2L_5L_3 \cos \gamma_5 \cos \gamma_3 + 2(L_2 - k)L_3 \cos \gamma_3$$

$$L_4^2 \sin^2 \gamma_4 = L_5^2 \sin^2 \gamma_5 + L_3^2 \sin^2 \gamma_3 - 2L_5L_3 \sin \gamma_5 \sin \gamma_3$$

En les additionnant, pour éliminer  $\gamma_4$ , on trouve :

$$(-2L_5L_3 \sin \gamma_5) \sin \gamma_3 + (2L_3(L_2 - k - L_5 \cos \gamma_5)) \cos \gamma_3 + (-L_4^2 + L_5^2 + (L_2 - k)^2 + L_3^2 - 2L_5(L_2 - k) \cos \gamma_5) = 0$$

ce qui permet d'exprimer  $\gamma_3$  en fonction de  $\gamma_5$ .

Soit  $k_1 \sin \gamma_3 + k_2 \cos \gamma_3 + k_3 = 0$   
avec  $k_1 = -2L_5 L_3 \sin \gamma_5$   
 $k_2 = 2L_3 (L_2 - k - L_5 \cos \gamma_5)$   
 $k_3 = -L_4^2 + L_5^2 + (L_2 - k)^2 + L_3^2 - 2L_5 (L_2 - k) \cos \gamma_5$

En posant  $t = \frac{\tan \gamma_3}{2}$

alors  $\sin \gamma_3 = \frac{2t}{1+t^2}$  et  $\cos \gamma_3 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$   
 $k_1 \frac{2t}{1+t^2} + k_2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + k_3 = 0$   
 $2k_1 t + k_2 (1-t^2) + k_3 (1+t^2) = 0$   
 $(k_3 - k_2)t^2 + 2k_1 t + (k_2 + k_3) = 0$   
 $t = \frac{-2k_1 \pm \sqrt{4k_1^2 - 4(k_3 - k_2)(k_2 + k_3)}}{2(k_3 - k_2)}$   
 $t = \frac{\tan \gamma_3}{2} = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_3 - k_2}$

Finalement  $\gamma_3 = 2 \arctan 2(-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}, k_3 - k_2)$

Dans Excel « Modélisation géométrie-cinématique » la feuille «  $g3=f(g5)$  » montre des résultats identiques à ceux de la méthode 1. L'angle  $\gamma_4$  est donné, à partir des deux relations de projection initiales, par :

$$\tan \gamma_4 = \frac{L_4 \sin \gamma_4}{L_4 \cos \gamma_4} = \frac{-L_5 \sin \gamma_5 + L_3 \sin \gamma_3}{-L_5 \cos \gamma_5 + (L_2 - k) + L_3 \cos \gamma_3}$$

soit  $\gamma_4 = \arctan 2(-L_5 \sin \gamma_5 + L_3 \sin \gamma_3, -L_5 \cos \gamma_5 + (L_2 - k) + L_3 \cos \gamma_3)$

## 2 Modélisation cinématique

### 2.1 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct (MCD) décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Ce modèle peut être obtenu soit par dérivation du modèle géométrique direct soit par la cinématique du solide.

#### 2.1.1 Dérivation temporelle du MGD

A partir des équations (3), (4) et (5) on obtient :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\dot{\gamma}_i = \frac{d\gamma_i}{dt} \text{ avec } i=1,2 \text{ ou } 3$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\gamma}_1 L_1 \sin \gamma_1 - (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3) L_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \\ \dot{y} &= \dot{\gamma}_1 L_1 \cos \gamma_1 + (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3) L_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 \end{aligned}$$

#### 2.1.2 Cinématique du solide

Les liaisons sont sans jeux.

$$\vec{V}_{K/0} = \vec{V}_{O_3/0} + \vec{KO}_3 \wedge \vec{\Omega}_{3/0} \text{ car le point K et le point } O_3 \text{ appartiennent au même solide 3}$$

$$\vec{V}_{O_3/0} = \vec{V}_{O_2/0} + \vec{O_3O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} \text{ les points } O_2 \text{ et } O_3 \text{ appartiennent au même solide 2}$$

$$\vec{V}_{O_2/0} = \underbrace{\vec{V}_{O_1/0}}_{\vec{0}} + \vec{O_2O_1} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} \quad \text{les points } O_1 \text{ et } O_2 \text{ appartiennent au même solide 1}$$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{V}_{K/0} &= \vec{O_2O_1} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} + \vec{O_3O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} + \vec{KO_3} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} \\ \vec{V}_{K/0} &= -L_1 \dot{\gamma}_1 \vec{x}_1 \wedge \vec{z} - L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \vec{x}_2 \wedge \vec{z} - L_3 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3) \vec{x}_3 \wedge \vec{z} \\ \vec{V}_{K/0} &= L_1 \dot{\gamma}_1 \vec{y}_1 + L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \vec{y}_2 + L_3 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3) \vec{y}_3 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \vec{V}_{K/0} &= (-L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 - L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - L_3 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3) \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) \vec{x}_0 \\ &\quad + (L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 + L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_3 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3) \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

et

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3$$

## 2.2 Modèle cinématique inverse

L'objectif du modèle cinématique inverse (MCI) est de calculer, à partir d'une configuration donnée, les vitesses articulaires qui assurent à l'effecteur une vitesse opérationnelle imposée.

A partir du MCD on tire

$$(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)L_2 = \frac{-\dot{x} - L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 - L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

et

$$(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)L_2 = \frac{\dot{y} - L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 - L_3 \dot{\gamma} \cos \gamma}{\cos(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

soit

$$\frac{-\dot{x} - L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 - L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)} = \frac{\dot{y} - L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 - L_3 \dot{\gamma} \cos \gamma}{\cos(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

$$\begin{aligned} -\dot{x} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma \cos(\gamma_1 + \gamma_2) &= \dot{y} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - L_3 \dot{\gamma} \cos \gamma \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ -L_1 \dot{\gamma}_1 (\sin \gamma_1 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - \cos \gamma_1 \sin(\gamma_1 + \gamma_2)) &= \dot{y} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + \dot{x} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_3 \dot{\gamma} (\sin \gamma \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - \cos \gamma \sin(\gamma_1 + \gamma_2)) \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{1}{L_1 \sin \gamma_2} [\dot{y} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + \dot{x} \cos(\gamma_1 + \gamma_2)]$$

$$\dot{\gamma}_1 L_1 = \frac{-\dot{x} - L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma}{\sin \gamma_1}$$

$$\dot{\gamma}_1 L_1 = \frac{\dot{y} - L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - L_3 \dot{\gamma} \cos \gamma}{\cos \gamma_1}$$

$$\frac{-\dot{x} - L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma}{\sin \gamma_1} = \frac{\dot{y} - L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - L_3 \dot{\gamma} \cos \gamma}{\cos \gamma_1}$$

$$\begin{aligned} L_3 \dot{\gamma} (-\sin \gamma \cos \gamma_1 + \cos \gamma \sin \gamma_1) &= \dot{x} \cos \gamma_1 + \dot{y} \sin \gamma_1 + L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) (\cos(\gamma_1 + \gamma_2) \sin \gamma_1 - \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \cos \gamma_1) \\ -L_3 \dot{\gamma} \sin(\gamma_2 + \gamma_3) &= \dot{x} \cos \gamma_1 + \dot{y} \sin \gamma_1 + L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin \gamma_2 \end{aligned}$$

$$L_2 \dot{\gamma}_2 \sin \gamma_2 = -L_3 \dot{\gamma} \sin(\gamma_2 + \gamma_3) - \dot{x} \cos \gamma_1 - \dot{y} \sin \gamma_1 - L_2 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2$$

$$L_2 \dot{\gamma}_2 \sin \gamma_2 = -L_3 \dot{\gamma} \sin(\gamma_2 + \gamma_3) - \dot{x} \cos \gamma_1 - \dot{y} \sin \gamma_1 - \frac{L_2 \dot{y} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + L_2 \dot{x} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_2 L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma_3}{L_1}$$

$$L_1 L_2 \dot{\gamma}_2 \sin \gamma_2 = -L_1 L_3 \dot{\gamma} \sin(\gamma_2 + \gamma_3) - L_1 \dot{x} \cos \gamma_1 - L_1 \dot{y} \sin \gamma_1 - L_2 \dot{y} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - L_2 \dot{x} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - L_2 L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma_3$$

$$L_1 L_2 \dot{\gamma}_2 \sin \gamma_2 = -L_3 \dot{\gamma} (L_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) + L_2 \sin \gamma_3) - \dot{x} (L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)) - \dot{y} (L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2))$$

$$\dot{\gamma}_2 = -\frac{1}{L_1 L_2 \sin \gamma_2} [L_3 \dot{\gamma} (L_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) + L_2 \sin \gamma_3) + \dot{x} (L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)) + \dot{y} (L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2))]$$

$$\dot{\gamma}_3 = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= \dot{\gamma} - \frac{\dot{y} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + \dot{x} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_3 \dot{\gamma} \sin \gamma_3}{L_1 \sin \gamma_2} \\ &\quad + \frac{1}{L_1 L_2 \sin \gamma_2} L_3 \dot{\gamma} (L_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) + L_2 \sin \gamma_3) + \dot{x} (L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)) + \dot{y} (L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2)) \\ \dot{\gamma}_3 &= \frac{1}{L_1 L_2 \sin \gamma_2} [\dot{\gamma} L_1 (L_2 \sin \gamma_2 + L_3 \sin(\gamma_2 + \gamma_3)) + \dot{x} L_1 \cos \gamma_1 + \dot{y} L_1 \sin \gamma_1] \end{aligned}$$

### 2.3 Cas du porteur seul constitué de la flèche 1 et du balancier 2

En ne considérant que le porteur constitué de la flèche 1 et du balancier 2 on trouve avec  $\vec{O_1 O_3} = x_3 \vec{x}_0 + y_3 \vec{y}_0$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \frac{1}{L_1 \sin \gamma_2} [\dot{y}_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + \dot{x}_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)] \\ \dot{\gamma}_2 &= -\frac{1}{L_1 L_2 \sin \gamma_2} [\dot{x}_3 (L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)) + \dot{y}_3 (L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2))] \\ \dot{x}_3 &= -L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 - L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ \dot{y}_3 &= L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 + L_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 \sin \gamma_1 - L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) & -L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}$$

Ou encore  $\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}$  où J est nommée matrice Jacobienne

avec  $J = \begin{pmatrix} -L_1 \sin \gamma_1 - L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) & -L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix}$

La matrice Jacobienne est carrée d'ordre 2. La méthode la plus générale consiste à calculer  $J^{-1}$ , la matrice inverse de J, qui permet de déterminer les vitesses articulaires  $\dot{\gamma}_1$  et  $\dot{\gamma}_2$  en fonction de  $\dot{x}_3$  et de  $\dot{y}_3$  grâce à la relation

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

On démontre que la matrice inverse se calcule à partir de la relation

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} {}^t(\text{com}J)$$

Dans un premier temps il convient de calculer le déterminant de J soit

$$\begin{aligned} \det J &= -L_1 L_2 \sin \gamma_1 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - L_2^2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_1 L_2 \cos \gamma_1 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + L_2^2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \\ \det J &= L_1 L_2 (\cos \gamma_1 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - \sin \gamma_1 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)) \\ \det J &= L_1 L_2 \sin \gamma_2 \end{aligned}$$

donc  $J^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 \sin \gamma_2} {}^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

où les coefficients  $a_{ij}$  sont les cofacteurs de J

$$\begin{aligned} a_{11} &= L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \\ a_{12} &= -L_1 \cos \gamma_1 - L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \\ a_{21} &= L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ a_{22} &= -L_1 \sin \gamma_1 - L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \end{aligned}$$

d'où

$${}^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & -L_1 \cos \gamma_1 - L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \\ L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) & -L_1 \sin \gamma_1 - L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ -L_1 \cos \gamma_1 - L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & -L_1 \sin \gamma_1 - L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{L_1 L_2 \sin \gamma_2} \begin{pmatrix} L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ -L_1 \cos \gamma_1 - L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & -L_1 \sin \gamma_1 - L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{\dot{x}_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + \dot{y}_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{L_1 \sin \gamma_2}$$

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{-\dot{x}_3 (L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2)) - \dot{y}_3 (L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2))}{L_1 L_2 \sin \gamma_2}$$

## 2.4 Relation entre les vitesses des coulisseaux des vérins et les vitesses articulaires

### 2.4.1 Vitesse du vérin de flèche V1

On note 1\* la tige du vérin de flèche V1 et 1\*\* le corps.

Le théorème de composition des mouvements des solides 0, 1, 1\*\*, 1\* implique sous forme torsorielle :

$$\{1/0\} + \{0/1^{**}\} + \{1^{**}/1^*\} + \{1^*/1\} = \{0\}$$

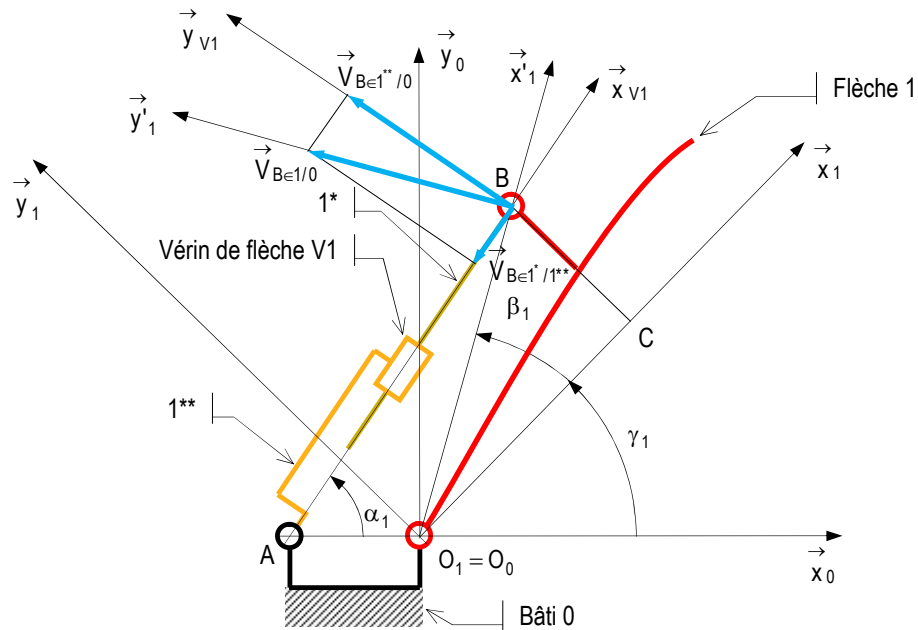


fig. 46

Avec les torseurs cinématiques :

$$\{1/0\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\gamma}_1 \vec{z} \\ \vec{V}_{O_1/0} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{0/1^{**}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{0/1^{**}} = -\dot{\alpha}_1 \vec{z} \\ \vec{V}_{A \in 0/1^{**}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{1^{**}/1^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1^{**}/1^*} = \vec{0} \\ \vec{V}_{B \in 1^{**}/1^*} = -V_1 \vec{x}_{V1} \end{Bmatrix} \quad \text{si on pose } \vec{V}_{B \in 1^*/1^{**}} = V_1 \vec{x}_{V1}$$

$$\{1^*/1\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1^*/1} = (\dot{\alpha}_1 - \dot{\gamma}_1) \vec{z} \\ \vec{V}_{B \in 1^*/1} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour ajouter ces torseurs il faut les réduire au même point, par exemple B.

$$\vec{V}_{B \in 1/0} = \underbrace{\vec{V}_{O_1/0}}_{=\vec{0}} + \vec{BO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -\lambda_1 \vec{x}'_1 \wedge \dot{\gamma}_1 \vec{z}_1 = \lambda_1 \dot{\gamma}_1 \vec{y}'_1$$

$$\vec{V}_{B \in 0/1^{**}} = \underbrace{\vec{V}_{A \in 0/1^{**}}}_{=\vec{0}} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{0/1^{**}} = -l_1 \vec{x}_{v1} \wedge -\dot{\alpha}_1 \vec{z} = -l_1 \dot{\alpha}_1 \vec{y}_{v1}$$

$$\lambda_1 \dot{\gamma}_1 \vec{y}'_1 - v_1 \vec{x}_{v1} - l_1 \dot{\alpha}_1 \vec{y}_{v1} = \vec{0}$$

Seule la vitesse  $v_1$  est calculée, alors :

$$\lambda_1 \dot{\gamma}_1 \vec{y}'_1 \cdot \vec{x}_{v1} + v_1 = 0$$

$$\left( \vec{x}_{v1}, \vec{y}'_1 \right) = \underbrace{\left( \vec{x}_{v1}, \vec{x}_0 \right)}_{=-\alpha_1} + \underbrace{\left( \vec{x}_0, \vec{x}'_1 \right)}_{=\gamma_1 + \beta_1} + \underbrace{\left( \vec{x}'_1, \vec{y}'_1 \right)}_{=\frac{\pi}{2}}$$

soit  $\lambda_1 \dot{\gamma}_1 \cos(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1 + \frac{\pi}{2}) - v_1 = 0$

alors  $-\lambda_1 \dot{\gamma}_1 \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1) + v_1 = 0$

$$v_1 = -\lambda_1 \dot{\gamma}_1 \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1) \text{ et } \vec{V}_{B \in 1^*/1^{**}} = -\lambda_1 \dot{\gamma}_1 \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1) \vec{x}_{v1} \quad (\sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1) > 0)$$

En appliquant le théorème de Pythagore généralisé au triangle  $O_1BA$  pour trouver  $\alpha_1$

$$(\vec{O_1B})^2 = c^2 + l_1^2 - 2cl_1 \cos \alpha_1$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + l_1^2 - 2cl_1 \cos \alpha_1 \text{ avec } a^2 + b^2 = \lambda_1^2$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{l_1^2 + c^2 - a^2 - b^2}{2cl_1}$$

$$\alpha_1 = \pm \arccos \frac{l_1^2 + c^2 - a^2 - b^2}{2cl_1}$$

Remarque : le théorème de composition des vecteurs vitesses au point B s'écrit (fig. 46) :

$$\vec{V}_{B \in 1^*/0} = \vec{V}_{B \in 1/0} = \vec{V}_{B \in 1^*/1^{**}} + \vec{V}_{B \in 1^{**}/0}$$

### 2.4.2 Vitesse du vérin de pénétration $V_2$

On note  $2^*$  la tige du vérin  $V_2$  et  $2^{**}$  le corps.

Le théorème de composition des mouvements des solides 1, 2,  $2^{**}$ ,  $2^*$  implique sous forme torsorielle :

$$\{2/1\} + \{1/2^{**}\} + \{2^{**}/2^*\} + \{2^*/2\} = \{0\}$$

Avec les torseurs cinématiques :

$$\{2/1\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\gamma}_2 \vec{z} \\ \vec{V}_{O_2/1} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\{1/2^{**}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/2^{**}} = -\dot{\alpha}_2 \vec{z} \\ \vec{V}_{D \in 1/2^{**}} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\{2^{**}/2^*\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2^{**}/2^*} = \vec{0} \\ \vec{V}_{F \in 2^{**}/2^*} = -v_2 \vec{x}_{v2} \end{array} \right\} \text{ si on pose } \vec{V}_{F \in 2^*/2^{**}} = v_2 \vec{x}_{v2}$$

$$\{2^*/2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2^*/2} = (\dot{\alpha}_2 - \dot{\gamma}_2) \vec{z} \\ \vec{V}_{F \in 2^*/2} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

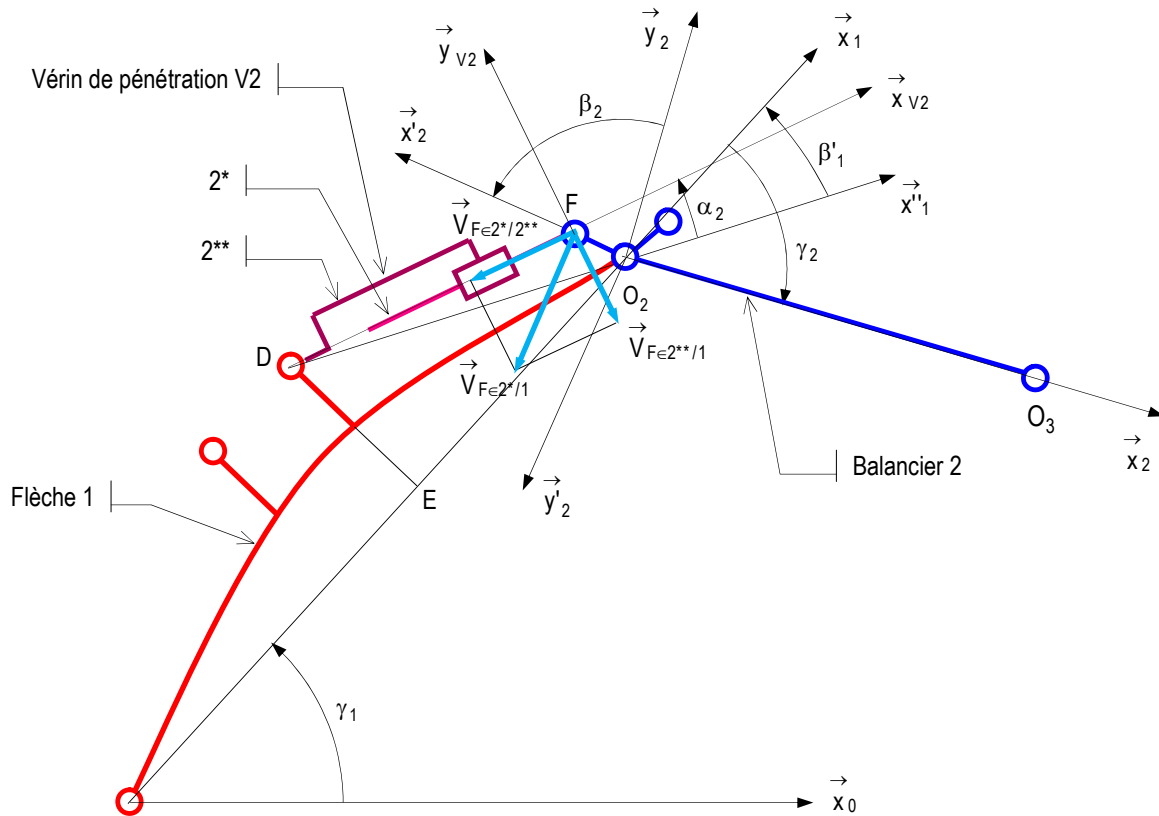


fig. 47

Pour ajouter ces torseurs il faut les réduire au même point.

On calcule ces torseurs au point F :

$$\vec{V}_{F \in 2/1} = \underbrace{\vec{V}_{O_2/1}}_{=0} + \vec{FO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -\delta \vec{x}'_2 \wedge \dot{\gamma}_2 \vec{z}$$

$$\vec{V}_{F \in 2/1} = \delta \dot{\gamma}_2 \vec{y}'_2$$

$$\vec{V}_{F \in 1/2^{**}} = \underbrace{\vec{V}_{D \in 1/2^{**}}}_{=0} + \vec{FD} \wedge \vec{\Omega}_{1/2^{**}} = -l_2 \vec{x}_{V2} \wedge -\dot{\alpha}_2 \vec{z}$$

$$\vec{V}_{F \in 1/2^{**}} = -l_2 \dot{\alpha}_2 \vec{y}_{V2}$$

$$\delta \dot{\gamma}_2 \vec{y}'_2 - v_2 \vec{x}_{V2} - l_2 \dot{\alpha}_2 \vec{y}_{V2} = \vec{0}$$

Seule la vitesse  $v_2$  est calculée, alors :

$$\delta \dot{\gamma}_2 \vec{y}'_2 \cdot \vec{x}_{V2} - v_2 = 0$$

$$\left( \vec{x}_{V2}, \vec{y}'_2 \right) = \left( \vec{x}_{V2}, \vec{x}''_1 \right) + \left( \vec{x}''_1, \vec{x}_1 \right) + \left( \vec{x}_1, \vec{x}_2 \right) + \left( \vec{x}_2, \vec{y}_2 \right) + \left( \vec{y}_2, \vec{x}'_2 \right) + \left( \vec{x}'_2, \vec{y}'_2 \right) = \gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2 - \alpha_2 + \pi$$

$$-\delta \dot{\gamma}_2 \cos(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2 - \alpha_2 + \pi) - v_2 = 0$$

$$v_2 = -\delta \dot{\gamma}_2 \cos(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2 - \alpha_2)$$

L'angle  $\alpha_2$  peut être déterminé en appliquant le théorème de Pythagore généralisé au triangle  $O_2FD$

$$\delta^2 = l_2^2 + \lambda_1'^2 - 2l_2\lambda_1' \cos \alpha_2$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{l_2^2 + \lambda_1'^2 - \delta^2}{2l_2\lambda_1'}$$

Remarque : Le théorème de composition des vecteurs vitesses au point F donne (fig. 48)  $\vec{V}_{F \in 2^*/1} = \vec{V}_{F \in 2/1} = \vec{V}_{F \in 2^*/2^{**}} + \vec{V}_{F \in 2^{**}/1}$

## 2.4.3 Vitesse du vérin de cavage V3

On note 3\* la tige du vérin V3 et 3\*\* le corps.

Le théorème de composition des mouvements des solides 1, 2, 2\*\*, 2\* implique sous forme torsorielle :

$$\{5/2\} + \{2/3^{**}\} + \{3^{**}/3^*\} + \{3^*/5\} = \{0\}$$

Avec les torseurs cinématiques :

$$\{5/2\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{5/2} = \dot{\gamma}_5 \vec{z} \\ \vec{V}_{H \in 5/2} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{2/3^{**}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/3^{**}} = -\dot{\alpha}_3 \vec{z} \\ \vec{V}_{G \in 2/3^{**}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{3^{**}/3^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{3^{**}/3^*} = \vec{0} \\ \vec{V}_{J \in 3^{**}/3^*} = -v_3 \vec{x}_{V3} \end{Bmatrix} \quad \text{si on pose } \vec{V}_{J \in 3^*/3^{**}} = v_3 \vec{x}_{V3} \quad \{T_{5 \rightarrow C3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{5T3} = J_{5T3} \vec{x}_{V3} \\ \vec{M}_{J,5T3} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{3^*/5\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{3^*/5} = (\dot{\alpha}_3 - \dot{\gamma}_5) \vec{z} \\ \vec{V}_{J \in 3^*/5} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

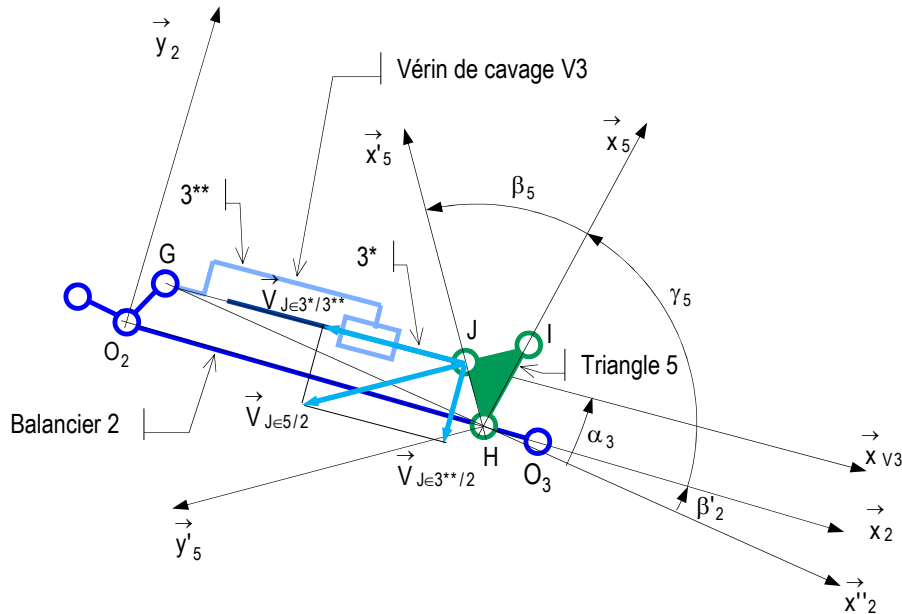


fig. 48

Pour ajouter ces torseurs il faut les réduire au même point.

On calcule ces torseurs au point J :

$$\vec{V}_{J \in 5/2} = \underbrace{\vec{V}_{H \in 5/2}}_{=\vec{0}} + \vec{JH} \wedge \vec{\Omega}_{5/2} = -l \vec{x}'_5 \wedge \dot{\gamma}_5 \vec{z}$$

$$\vec{V}_{J \in 5/2} = l \dot{\gamma}_5 \vec{y}'_5$$

$$\vec{V}_{J \in 2/3^{**}} = \underbrace{\vec{V}_{G \in 2/3^{**}}}_{=\vec{0}} + \vec{JG} \wedge \vec{\Omega}_{2/3^{**}} = -l_3 \vec{x}_{V3} \wedge -\dot{\alpha}_3 \vec{z}$$

$$\vec{V}_{J \in 2/3^{**}} = -l_3 \dot{\alpha}_3 \vec{y}_{V3}$$

$$l \dot{\gamma}_5 \vec{y}'_5 - v_3 \vec{x}_{V3} - l_3 \dot{\alpha}_3 \vec{y}_{V3} = \vec{0}$$

$$I_5 \dot{\gamma}_5 \vec{y}'_5 \cdot \vec{x}_{v3} - v_3 = 0$$

$$\left( \vec{x}_{v3}, \vec{y}'_5 \right) = \underbrace{\left( \vec{x}_{v3}, \vec{x}''_{12} \right)}_{=-\alpha_3} + \underbrace{\left( \vec{x}''_{12}, \vec{x}_2 \right)}_{=\beta'_2} + \underbrace{\left( \vec{x}_2, \vec{x}_5 \right)}_{=\gamma_5} + \underbrace{\left( \vec{x}_5, \vec{y}'_5 \right)}_{=\beta_5 + \frac{\pi}{2}}$$

$$\left( \vec{x}_{v3}, \vec{y}'_5 \right) = \gamma_5 - \alpha_3 + \beta'_2 + \beta_5 + \frac{\pi}{2}$$

$$I_5 \dot{\gamma}_5 \cos(\gamma_5 - \alpha_3 + \beta'_2 + \beta_5 + \frac{\pi}{2}) - v_3 = 0$$

$$v_3 = -I_5 \dot{\gamma}_5 \sin(\gamma_5 + \beta'_2 + \beta_5 - \alpha_3)$$

L'angle  $\alpha_3$  est calculé à partir de  $\vec{GJ} = \vec{GH} + \vec{HJ}$

$$I_3 \cos \alpha_3 = \lambda_2 + I \cos(\gamma_5 + \beta'_2 + \beta_5)$$

$$I_3 \sin \alpha_3 = I \sin(\gamma_5 + \beta'_2 + \beta_5)$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{I \sin(\gamma_5 + \beta'_2 + \beta_5)}{\lambda_2 + I \cos(\gamma_5 + \beta'_2 + \beta_5)}$$

Remarque : Le théorème de composition des vitesses au point J donne (fig. 48)  $\vec{V}_{J \in 5/2} = \vec{V}_{J \in 3^*/2} = \vec{V}_{J \in 3^*/3^{**}} + \vec{V}_{J \in 3^{**}/2}$

#### 2.4.4 Relation entre les vitesses angulaires du triangle et du godet

##### Détermination analytique

A partir de  $\vec{O_3K} = \vec{O_3H} + \vec{HI} + \vec{IK}$

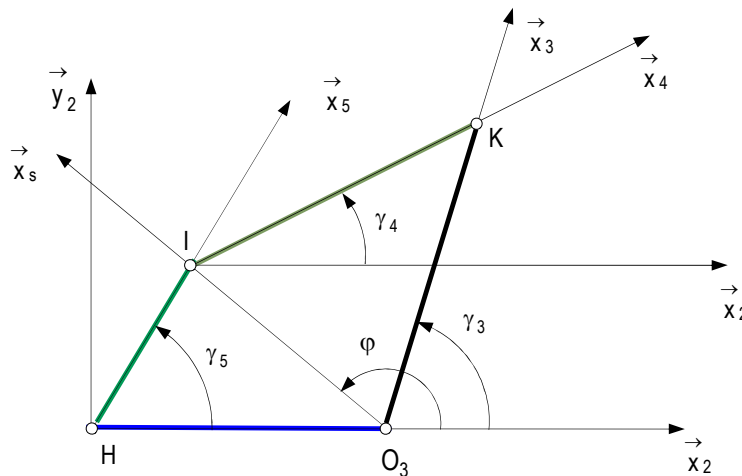


fig. 49

En projection sur  $\vec{x}_2$

$$L_3 \cos \gamma_3 = -L_2 + L_5 \cos \gamma_5 + L_4 \cos \gamma_4$$

Dérivons cette expression par rapport à  $\gamma_5$

$$-L_3 \sin \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{d\gamma_5} = -L_5 \sin \gamma_5 - L_4 \sin \gamma_4 \frac{d\gamma_4}{d\gamma_5}$$

Si on retranche l'angle  $\gamma_4$  dans l'expression précédente (ce qui revient à faire tourner  $H; \vec{x}_2, \vec{y}_2$  de l'angle  $\gamma_4$ ) on obtient :

$$-L_3 \sin(\gamma_3 - \gamma_4) \frac{d\gamma_3}{d\gamma_5} = -L_5 \sin(\gamma_5 - \gamma_4)$$

Comme

$$\frac{d\gamma_3}{d\gamma_5} = \frac{d\gamma_3/dt}{d\gamma_5/dt} = \frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\gamma}_5}$$

alors 
$$-L_3 \sin(\gamma_3 - \gamma_4) \frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\gamma}_5} = -L_5 \sin(\gamma_5 - \gamma_4)$$

et 
$$\frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\gamma}_5} = \frac{L_5 \sin(\gamma_5 - \gamma_4)}{L_3 \sin(\gamma_3 - \gamma_4)}$$

Il faut connaître l'angle  $\gamma_4$

A partir de 
$$\begin{aligned} \vec{O_3I} &= \vec{O_3K} + \vec{KI} \\ (\vec{O_3I})^2 &= (\vec{O_3K})^2 + (\vec{KI})^2 + 2\vec{O_3K} \cdot \vec{KI} \\ s^2 &= L_3^2 + L_4^2 + 2L_3L_4 \vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 \\ s^2 &= L_3^2 + L_4^2 - 2L_3L_4 \cos(\gamma_4 - \gamma_3) \\ \cos(\gamma_4 - \gamma_3) &= \frac{L_3^2 + L_4^2 - s^2}{2L_3L_4} \end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \gamma_3 \pm \arccos \frac{L_3^2 + L_4^2 - s^2}{2L_3L_4}$$

avec 
$$s^2 = (L_2 - k)^2 + L_5^2 - 2(L_2 - k)L_5 \cos \gamma_5$$

### Détermination graphique

Il est possible de trouver graphiquement le rapport de transmission  $\frac{d\gamma_5}{dt} / \frac{d\gamma_3}{dt}$  à partir de la notion de centre instantané de rotation (CIR) et du théorème des trois plans glissants.

*Théorème des trois plans glissants :*

Les CIR (centre instantané de rotation)  $I_{10}$ ,  $I_{02}$  et  $I_{21}$  associés aux mouvement plan sur plan de trois plans ( $\pi_0$ ), ( $\pi_1$ ) et ( $\pi_2$ ) pris deux à deux sont alignés.

Dans ce système 4 barres convexe il y a donc 6 CIR (*fig. 50*). Les CIR associés aux quatre liaisons pivots  $I_{52}$ ,  $I_{45}$ ,  $I_{43}$  et  $I_{32}$  sont évidents. Les deux autres  $I_{53}$  et  $I_{42}$  se déterminent à partir du théorème des trois plans glissants : les CIR sont alignés trois à trois. Par exemple si on veut trouver  $I_{53}$  il est aligné avec  $I_{45}$  et  $I_{43}$  (on élimine l'indice commun entre les deux) mais aussi avec  $I_{52}$  et  $I_{32}$ . Le CIR  $I_{42}$  est aligné avec les CIR  $I_{52}$  et  $I_{45}$  mais aussi avec  $I_{43}$  et  $I_{32}$ .

Par définition du CIR  $\vec{V}_{I_{53} \in 5/3} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I_{53} \in 5/3} &= \vec{V}_{I_{53} \in 5/2} + \vec{V}_{I_{53} \in 2/3} \\ \vec{V}_{I_{53} \in 5/3} &= I_{53} \vec{H} \wedge \vec{\Omega}_{5/2} + I_{53} \vec{O_3} \wedge \vec{\Omega}_{2/3} \end{aligned}$$

Comme 
$$\begin{aligned} \vec{O_3I_{53}} &= \rho_3 \vec{x}_2 \text{ et } \vec{HI_{53}} = \rho_5 \vec{x}_2 \\ \vec{\Omega}_{3/2} &= \frac{d\gamma_3}{dt} \vec{z} = \dot{\gamma}_3 \vec{z} \text{ et } \vec{\Omega}_{5/2} = \frac{d\gamma_5}{dt} \vec{z} = \dot{\gamma}_5 \vec{z} \end{aligned}$$

Alors 
$$\begin{aligned} \vec{V}_{I_{53} \in 5/3} &= -\rho_5 \vec{x}_2 \wedge \dot{\gamma}_5 \vec{z} - \rho_3 \vec{x}_2 \wedge -\dot{\gamma}_3 \vec{z} \\ \vec{V}_{I_{53} \in 5/3} &= (\rho_5 \dot{\gamma}_5 - \rho_3 \dot{\gamma}_3) \vec{y}_2 \end{aligned}$$

D'où 
$$\rho_3 \dot{\gamma}_5 - \rho_5 \dot{\gamma}_3 = 0$$

Finalement 
$$\frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\gamma}_5} = \frac{\rho_5}{\rho_3}$$

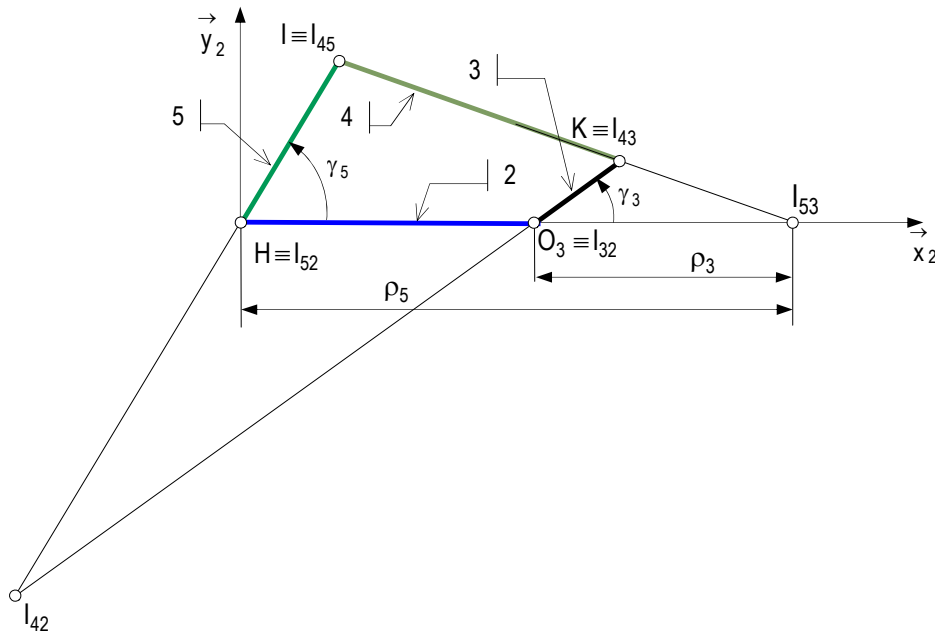


fig. 50

Les distances  $\rho_3$  et  $\rho_5$  sont continûment variables. La solution graphique ne peut être effectuée que pour des positions particulières.

La distance  $\rho_3$  peut se calculer à partir des angles  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$  en appliquant la loi des sinus dans le triangle  $O_3I_{53}K$  (fig. 51) soit :

$$\frac{\rho_3}{\sin(\gamma_3 + \gamma_4)} = \frac{L_3}{\sin \gamma_4}$$

alors

$$\rho_3 = \frac{L_3 \sin(\gamma_3 + \gamma_4)}{\sin \gamma_4}$$

avec

$$\gamma_4 = \gamma_3 \pm \arccos \frac{L_3^2 + L_4^2 - s^2}{2L_3L_4}$$

et

$$s^2 = (L_2 - k)^2 + L_5^2 - 2(L_2 - k)L_5 \cos \gamma_5 \text{ (voir § 2.8)}$$

La distance

$$\rho_5 = \rho_3 + L_2$$

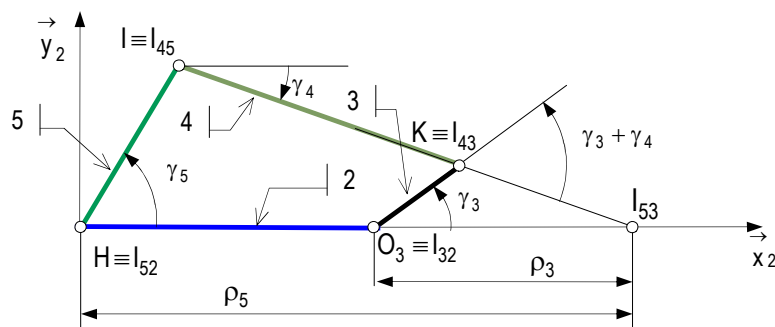


fig. 51

La fig. 52 montre les résultats de  $\frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\gamma}_5} = \frac{\rho_5}{\rho_3}$  et des vitesses angulaires  $\dot{\gamma}_3$  et  $\dot{\gamma}_5$  en fonction de l'orientation angulaire du triangle par rapport au balancier (voir dossier Excel « Modélisation géométrique et cinématique » feuille « Rapport vitesses g3-g5 »).

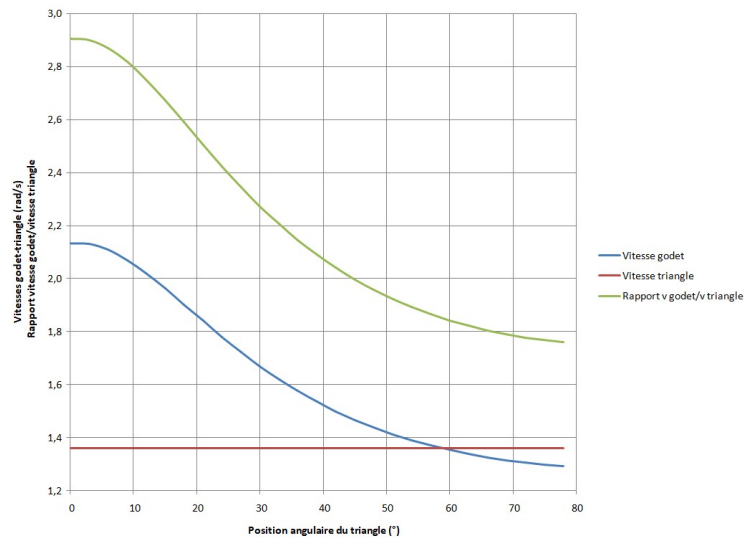


fig. 52

## 2.5 Génération de mouvement point à point avec lois horaires imposées

Classiquement nous adoptons pour chaque coulisseau de vérin une loi de vitesse trapézoïdale ou triangulaire. Pour l'élément considéré  $\dot{q}(t)$  est la vitesse (linéaire ou angulaire),  $\Delta q$  l'amplitude du déplacement (linéaire ou angulaire). La durée du déplacement est notée  $T$  et  $\tau$  est la durée de l'accélération ou de la décélération  $a$ .

- Profil trapézoïdal de vitesse**

$$\dot{q}(t = \tau) = a\tau \text{ et } \Delta q = a\tau (T - \tau)$$

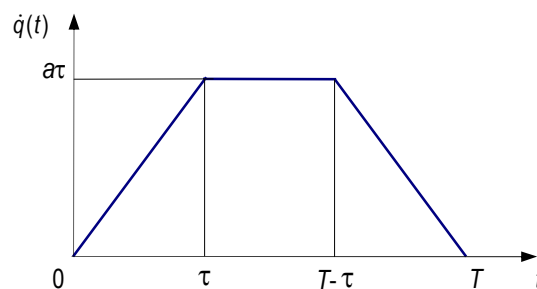


fig. 53

- Profil triangulaire de vitesse**

$$\dot{q}(t = \frac{T}{2}) = \frac{1}{2}aT \text{ et } \Delta q = \frac{1}{4}aT^2$$

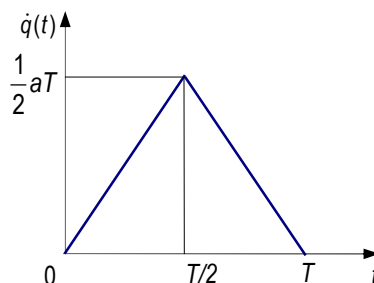


fig. 54

### Application numérique :

$$L_1 = 520\text{mm}$$

$$L_2 = 300\text{mm}$$



$$\begin{aligned}x_{3i} &= 530\text{mm} & (\text{reprise des valeurs du § 1.11}) \\y_{3i} &= 490\text{mm} \\x_{3f} &= 715\text{mm} \\y_{3f} &= 10\text{mm}\end{aligned}$$

La durée de déplacement du point  $O_3$  est de 4,6 s et la rotation du godet est de 6 s.

Les relations du § 1.10.2 permettent d'obtenir les angles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et donc de définir les positions initiale et finale du point  $O_3$ .

L'orientation initiale du godet est fixée indirectement par l'angle  $\gamma_5 = 78^\circ$  du triangle 5 par rapport au balancier 2.

Les relations des § 1.13, 1.14 et 1.15 permettent de trouver les variations des longueurs des vérins :  $\Delta l_1 = 53,72\text{mm}$ ,  $\Delta l_2 = 1,15\text{mm}$  et  $\Delta l_3 = 5124\text{mm}$ .

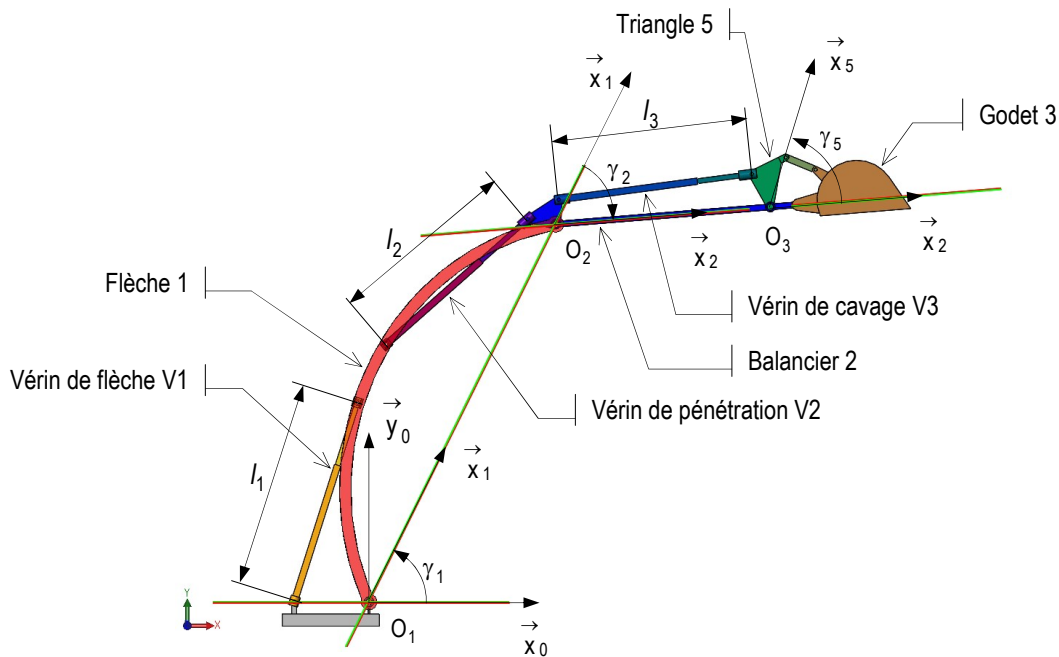


fig. 55

#### • Loi horaire du vérin V1

On choisit un profil trapézoïdal de vitesse.

$$\Delta l_1 = 53,72\text{ mm}$$

$$T = 4,6\text{ s}$$

$$\tau = 0,1\text{ s}$$

$$a_1 = \frac{\Delta l_1}{\tau(T - \tau)} = \frac{53,72}{0,1 \times (4,6 - 0,1)} = 119,378\text{ mm.s}^{-2}$$

$$v_1 = a_1 \tau = \frac{\Delta l_1}{(T - \tau)} = \frac{53,72}{4,5} = 11,938\text{ mm.s}^{-1}$$

#### • Loi horaire du vérin V2

On choisit un profil triangulaire de vitesse.

$$\Delta l_2 = 1,151\text{ mm}$$

$$T = 4,6\text{ s}$$

$$a_2 = \frac{4\Delta l_2}{T^2} = \frac{4 \times 1,151}{4,6^2} = 0,2176\text{ mm.s}^{-2}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} a_2 T = \frac{2\Delta l_2}{T} = \frac{2 \times 1,151}{4,6} = 0,5 \text{ mm.s}^{-1}$$

#### • Loi horaire du vérin V3

On choisit un profil triangulaire de vitesse. Le mouvement du godet démarre à 4,6 s et se poursuit pendant 6 s.

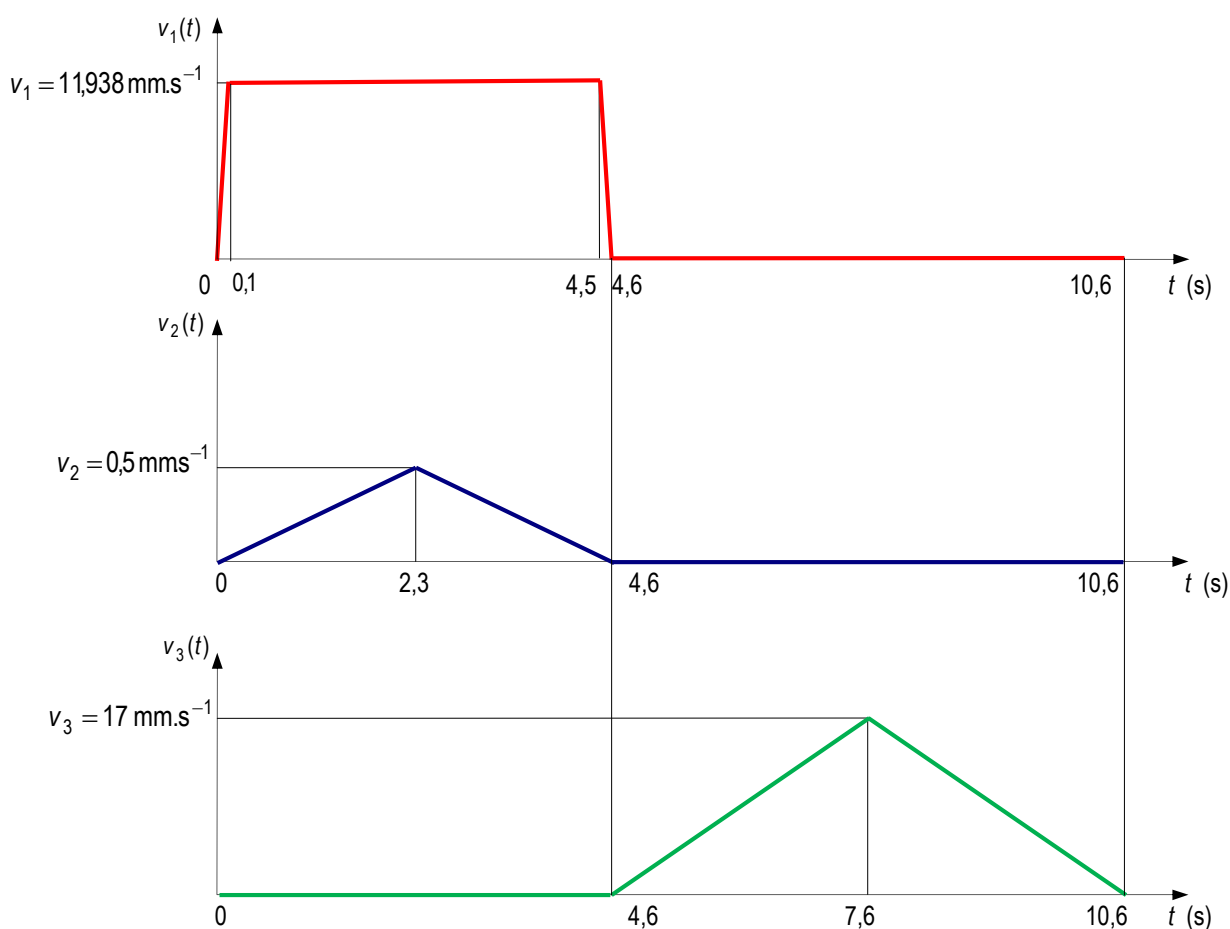
$$\Delta l_3 = 51,24 \text{ mm}$$

$$\Delta T_3 = 6 \text{ s}$$

$$a_3 = \frac{4\Delta l_3}{\Delta T_3^2} = \frac{4 \times 51,24}{6^2} = 5,693 \text{ mm.s}^{-2}$$

$$v_3 = \frac{1}{2} a_3 \Delta T_3 = \frac{2\Delta l_3}{\Delta T_3} = \frac{2 \times 51,24}{6} = 17,08 \text{ mm.s}^{-1}$$

La *fig. 56* récapitule les trois résultats ci-dessus.



*fig. 56*

Les calculs sont consignés dans le fichier Excel « mvt point à point » feuille « longueurs vérins ».

La *fig. 57* issue de la simulation Méca3D valide les résultats précédents.

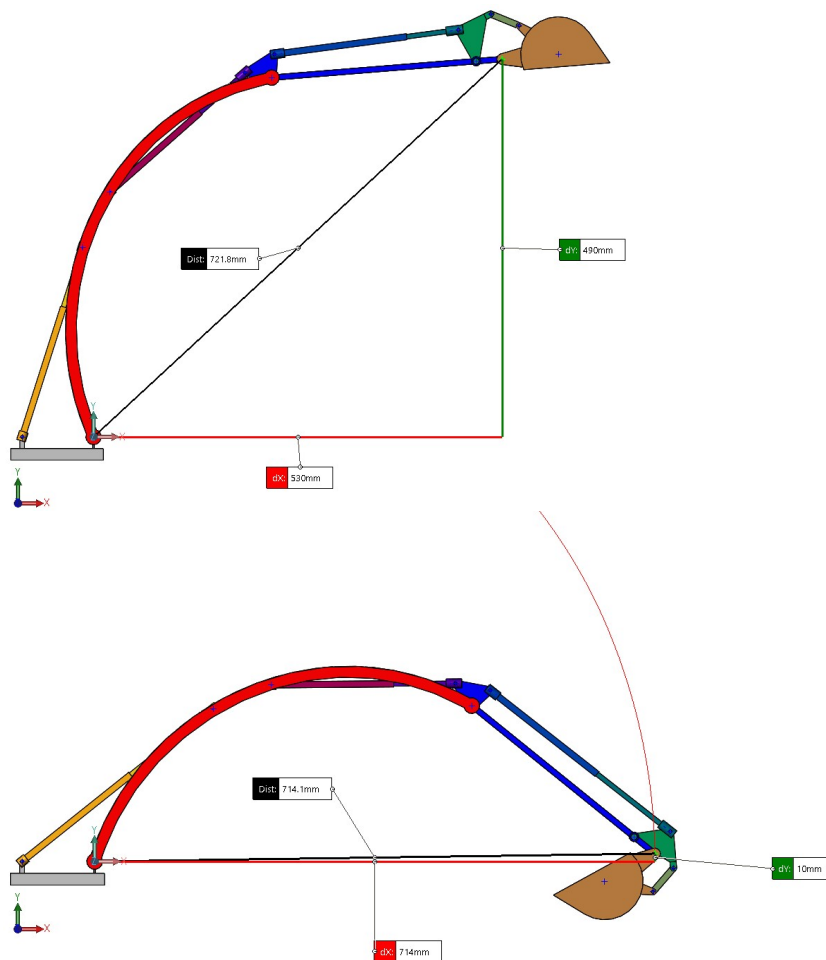


fig. 57

## 2.6 Simulation de l'épure

La fig. 58 montre les contraintes à prendre en compte pour les positions et orientations initiales d'une simulation cinématique de la pelleteuse.

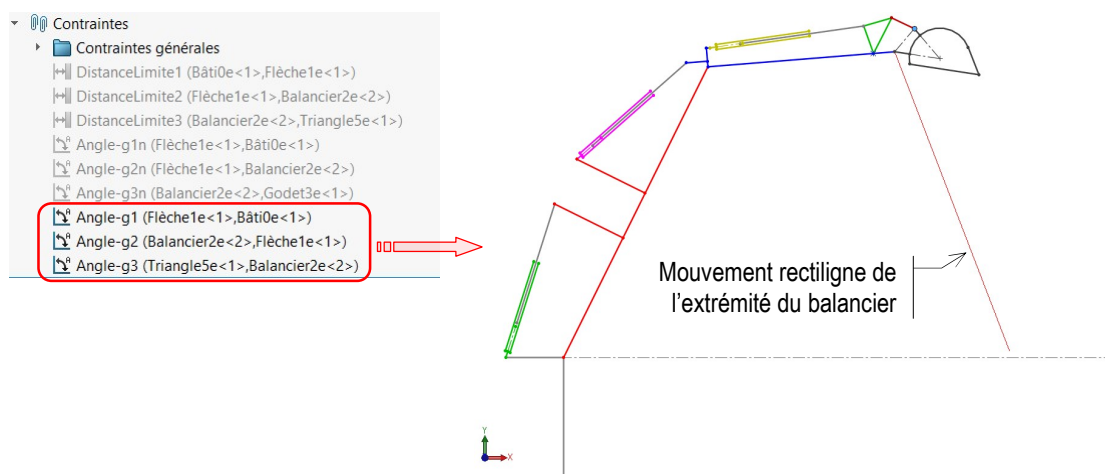


fig. 58

Les valeurs nécessaires à la simulation cinématique sont regroupées dans le fichier Excel « mvt point à point », feuille « mvt rect O3 ».

La fig. 59 montre une opération de nivellement et les contraintes à prendre en compte pour la simulation cinématique et statique.

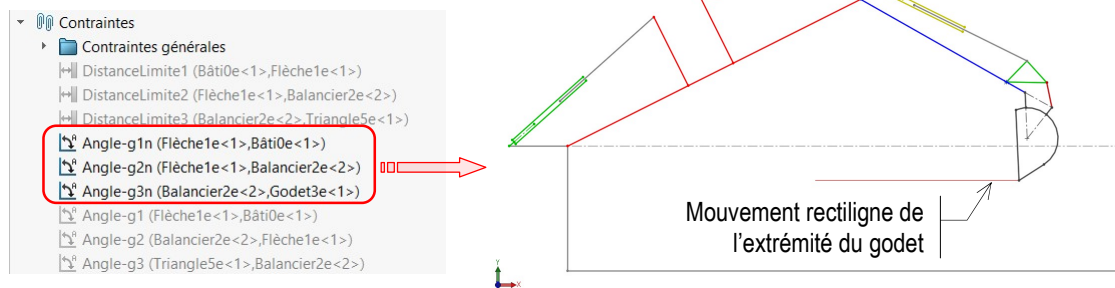


fig. 59 : Opération de nivellement

On désire que  $\vec{x}'_3$  soit tel que  $(\vec{x}'_3, \vec{x}_0) = 90^\circ$  afin que le godet reste « vertical » dans cette opération de nivellement.

$$(\vec{x}'_3, \vec{x}_0) = (\vec{x}'_3, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_2) + (\vec{x}_2, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_0)$$

$$90 = \beta_3 - \gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\gamma_3 = -90 + \beta_3 - \gamma_2 - \gamma_1$$

Les valeurs nécessaires à la simulation sont regroupées dans le fichier Excel « mvt point à point », feuille « nivellement ».

## 2.7 Loi entrée-sortie cinématique du vérin électrique

### 2.7.1 Schéma cinématique

L'examen des pièces démontées (§1.4) permet de tracer le schéma cinématique plan développé du vérin (fig. 60).

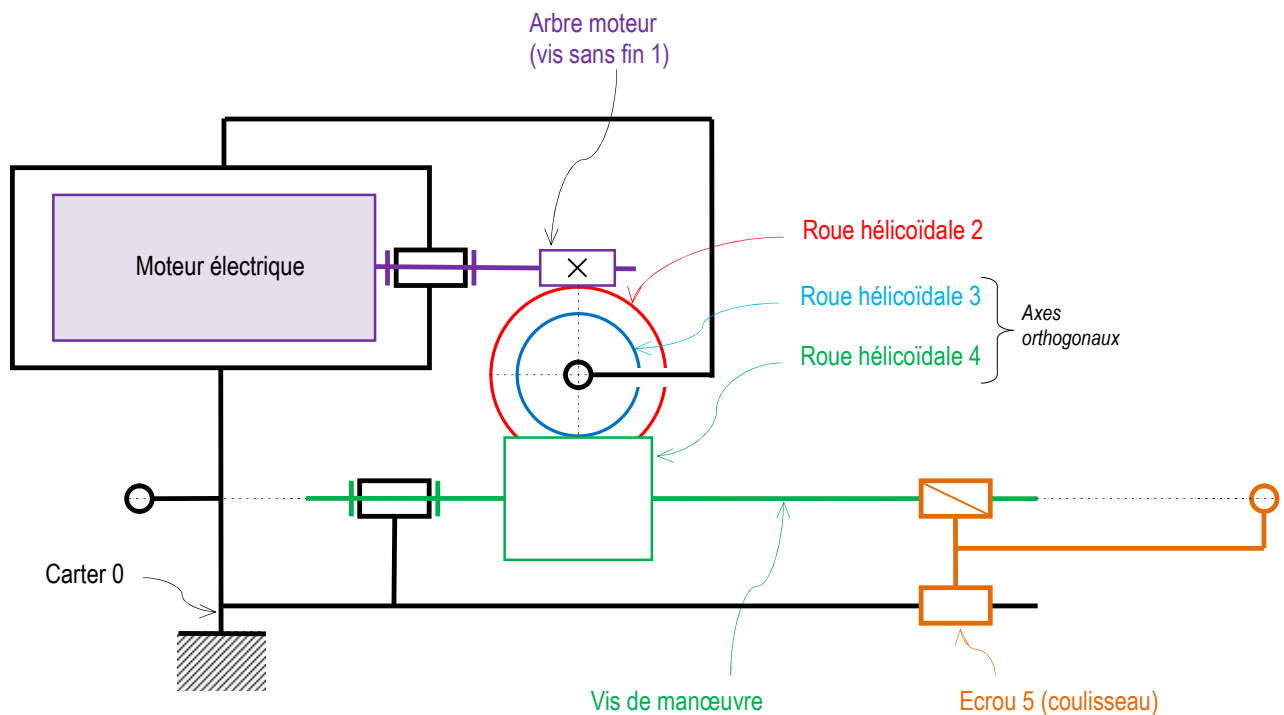


fig. 60 : Schéma cinématique plan développé du vérin électrique

### 2.7.2 Détermination du rapport de transmission

D'après la fig. 60 la transmission de mouvement depuis l'arbre moteur jusqu'au coulisseau comporte :

- l'arbre moteur qui est une vis sans fin 1 à deux filets à droite,  $z_1 = 2$  ;
- la roue hélicoïdale 2 associée à 1, avec  $z_2 = 25$  dents ;
- la roue hélicoïdale 3 liée à 2 et d'axes communs,  $z_3 = 6$  dents ;

- la roue hélicoïdale 4 d'axe orthogonal à l'axe de la roue 3,  $z_4 = 11$  dents ; cette roue est liée à la vis de manœuvre ;
- le coulisseau 5 ; le système vis-écrou est au pas  $p = 3$  mm à droite.

Nous notons  $\omega_i$  avec  $i = 1, 2, 3$  ou  $4$  les vitesses de rotation des différents éléments et  $v_5$  la vitesse du coulisseau par rapport au carter.

Il s'agit de trouver  $v_5$  en fonction de la vitesse du moteur  $\omega_1$

Pour le système vis-écrou :

$$v_5 = h \omega_4 \text{ avec le pas réduit } h = \frac{p}{2\pi}$$

Les rapports de transmission sont, pour 1 et 2 d'une part et 3 et 4 d'autre part :

$$r_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

et  $r_2 = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}$  avec  $\omega_2 = \omega_3$

soit  $\omega_2 = \frac{z_4}{z_3} \omega_4$  alors  $\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$

Si on note  $r = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = r_1 r_2$  alors  $\omega_4 = \frac{\omega_1}{r}$

Finalement  $v_5 = \frac{h}{r} \omega_1$

AN :  $r = \frac{25 \times 11}{2 \times 6} \cong 22,9$

$$v_5 (\text{mm.s}^{-1}) = \frac{\frac{3}{2\pi}}{\frac{25 \times 11}{2 \times 6}} \omega_1 = \frac{3 \times 6}{\pi \times 25 \times 11} \omega_1 (\text{rad.s}^{-1}) \cong 0,02083 \omega_1$$

Note : une simulation avec Méca3D dans Solidworks valide le résultat ci-dessus. Pour un choix de  $v_5 = 4,5 \text{ mm.s}^{-1}$  on trouve  $\omega_1 \cong 216 \text{ rad.s}^{-1}$ .

### 3 Modélisation statique

La modélisation statique de la pelleteuse nécessite bien entendu une conception isostatique.

Toutes les liaisons sont géométriquement parfaites et sans frottement.

#### 3.1 Analyse mécanique de la version V1

Dans cette représentation schématique les vérins électriques sont représentés simplement par une tige (coulisseau) en liaison glissière avec le corps (glissière). La transmission du mouvement depuis le moteur électrique jusqu'au coulisseau n'est pas représentée.

D'après le schéma cinématique *fig. 17* et le graphe de structure *fig. 61*, le nombre de pièces de la pelleteuse est  $N_p = 12$  et le nombre de liaisons est  $N_L = 15$  donc le nombre cyclomatique  $v$  définissant le nombre de cycles indépendants

$$\text{est } v = N_L - N_p + 1 = 15 - 12 + 1 = 4.$$

Il est donc possible d'écrire  $E_c = 6v = 6 \times 4 = 24$  équations cinématiques de rang  $r_c$  avec  $I_c = 31$  inconnues cinématiques.

Le nombre de degrés de libertés utiles, correspond au mouvement de la flèche 1, du balancier 3 et du godet 3, est  $m_{cu} = 3$ .

Intuitivement on dénombre  $m_{ci} = 4$  mobilités internes (rotation des trois vérins et de la bielle 4 autour de leurs axes). Donc au total la pelleteuse possède  $m_c = m_{cu} + m_{ci} = 7$  degrés de mobilité.

Comme  $r_c = I_c - m_c = 31 - 7 = 24$  alors le degré de surabondance est  $h_c = E_c - r_c = 24 - 24 = 0$ .

En conclusion la pelleteuse comporte 3 degrés de mobilité utiles et la pelleteuse schématisée est donc non surabondante géométriquement (cinématiquement, ou isostatique).

#### 3.2 Analyse mécanique de la version V2

$I_c = 15$  inconnues cinématiques (*fig. 62*).

Le nombre de degrés de libertés utiles est  $m_{cu} = 3$ .

Intuitivement on dénombre  $m_{ci} = 0$  mobilité interne. Donc au total la pelleteuse possède  $m_c = m_{cu} + m_{ci} = 3$  degrés de mobilité. Comme  $r_c = l_c - m_c = 15 - 3 = 12$  alors le degré de surabondance est  $h_c = E_c - r_c = 24 - 12 = 12$ . En conclusion la pelleteuse schématisée V2 comporte 3 degrés de mobilité utile et est donc surabondante géométriquement (cinématiquement, ou hyperstatique) de degré 12.

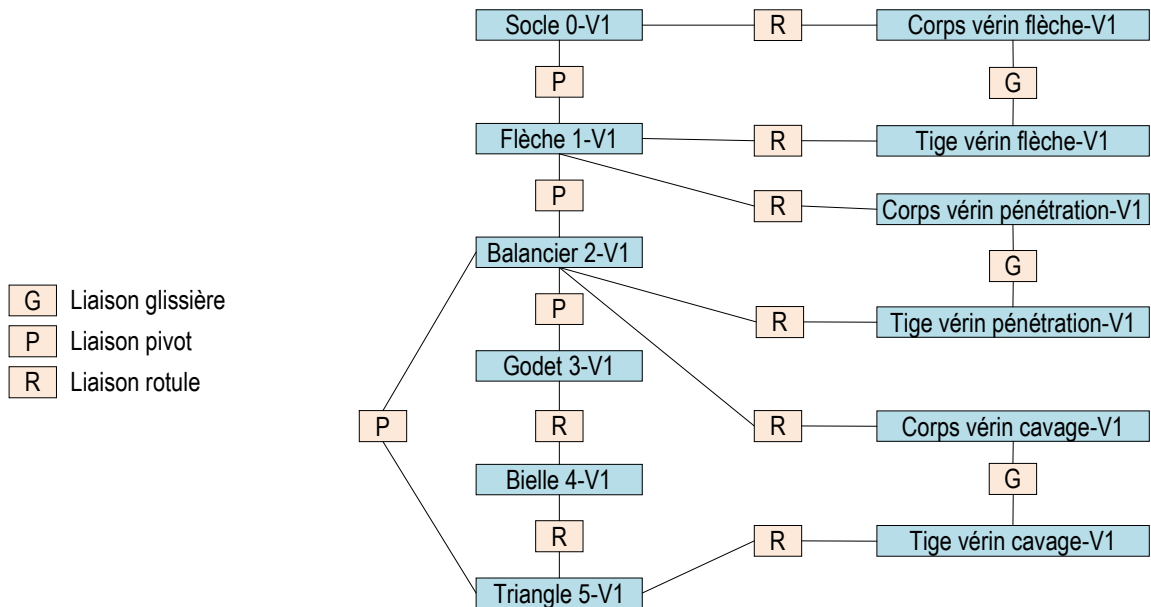


fig. 61 : Graphe de structure de la version V1

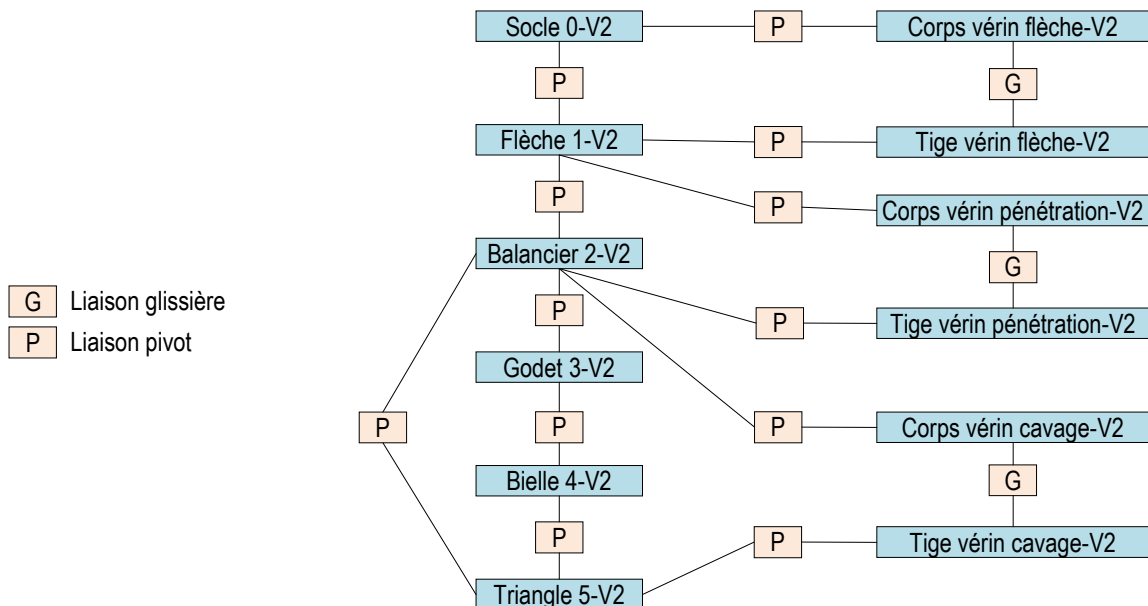


fig. 62 : Graphe de structure de la version V2

### 3.3 Action mécanique du vérin V1 sur la flèche 1

**Isolement de  $E_1 \equiv 1 \cup 2 \cup 3$  + charge  $\cup 4 \cup 5 \cup V2 \cup V3$  dans une situation quelconque.**

L'équation torsielle d'équilibre donne

$$\{0 \rightarrow 1\} + \{V1 \rightarrow 1\} + \{\text{pes} \rightarrow E_1\} = \{0\}$$

Il convient d'isoler le vérin V1

Comme le vérin V1 est lié au socle 0 et au bras 1 par deux liaisons rotules et si la masse de V1 est négligée alors le vérin est soumis

à deux actions mécaniques en A et B,  $\vec{F}_{0 \rightarrow V1}$  et  $\vec{F}_{1 \rightarrow V1}$ . L'équation de résultante en conséquence sur  $\vec{x}_{V1}$  donne :

$$F_{0V1} + F_{1V1} = 0$$

Le torseur associé à la pesanteur est :

$$\{\text{pesanteur} \rightarrow E_1\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{pesanteur} \rightarrow E_1} = -m_{E_1} g \vec{y}_0 \\ \vec{M}_{G_{E_1}, \text{pesanteur} \rightarrow E_1} = \vec{0} \end{cases}$$

L'équation de moments en  $O_1$  en conséquence sur  $\vec{z}$  donne :

$$\vec{M}_{O_1, 0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O_1, \text{pes} \rightarrow E_1} \cdot \vec{z} = 0$$

avec

$$\vec{M}_{O_1, 0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = 0 \text{ (liaison pivot sans frottement)}$$

$$\vec{M}_{O_1, \text{pes} \rightarrow E_1} = \underbrace{\vec{M}_{G_{E_1}, \text{pes} \rightarrow E_1}}_{=0} + \vec{O_1 G_{E_1}} \wedge -m_{E_1} g \vec{y}_0 = -m_{E_1} g x_{G_{E_1}} \vec{z} \text{ car } \vec{O_1 G_{E_1}} = x_{G_{E_1}} \vec{x}_0 + y_{G_{E_1}} \vec{y}_0$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = \underbrace{\vec{M}_{B, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z}}_{=0} + (\vec{O_1 B} \wedge F_{V11} \vec{x}_{V1}) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = F_{V11} \vec{x}_{V1} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{O_1 B}) = F_{V11} \vec{x}_{V1} \cdot (\vec{z} \wedge (a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1)) \text{ car } \vec{O_1 B} = \vec{O_1 C} + \vec{CB} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = F_{V11} \vec{x}_{V1} \cdot (a \vec{y}_1 - b \vec{x}_1)$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = F_{V11} (a \vec{x}_{V1} \cdot \vec{y}_1 - b \vec{x}_{V1} \cdot \vec{x}_1)$$

Avec

$$\left( \vec{x}_1, \vec{x}_{V1} \right) = \left( \vec{x}_1, \vec{x}_0 \right) + \left( \vec{x}_0, \vec{x}_{V1} \right) = \alpha_1 - \gamma_1$$

$$\left( \vec{y}_1, \vec{x}_{V1} \right) = \left( \vec{y}_1, \vec{x}_1 \right) + \left( \vec{x}_1, \vec{x}_0 \right) + \left( \vec{x}_0, \vec{x}_{V1} \right) = -\frac{\pi}{2} - \gamma_1 + \alpha_1$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = F_{V11} \left( a \cos(\alpha_1 - \gamma_1 - \frac{\pi}{2}) - b \cos(\alpha_1 - \gamma_1) \right)$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = F_{V11} \left( a \cos(\alpha_1 - \gamma_1 - \frac{\pi}{2}) - b \cos(\alpha_1 - \gamma_1) \right)$$

D'où

$$-F_{V11} (a \sin(\alpha_1 - \gamma_1) - b \cos(\alpha_1 - \gamma_1)) - m_{E_1} g x_{G_{E_1}} = 0$$

$$F_{V11} = - \frac{m_{E_1} g x_{G_{E_1}}}{-a \sin(\alpha_1 - \gamma_1) + b \cos(\alpha_1 - \gamma_1)}$$

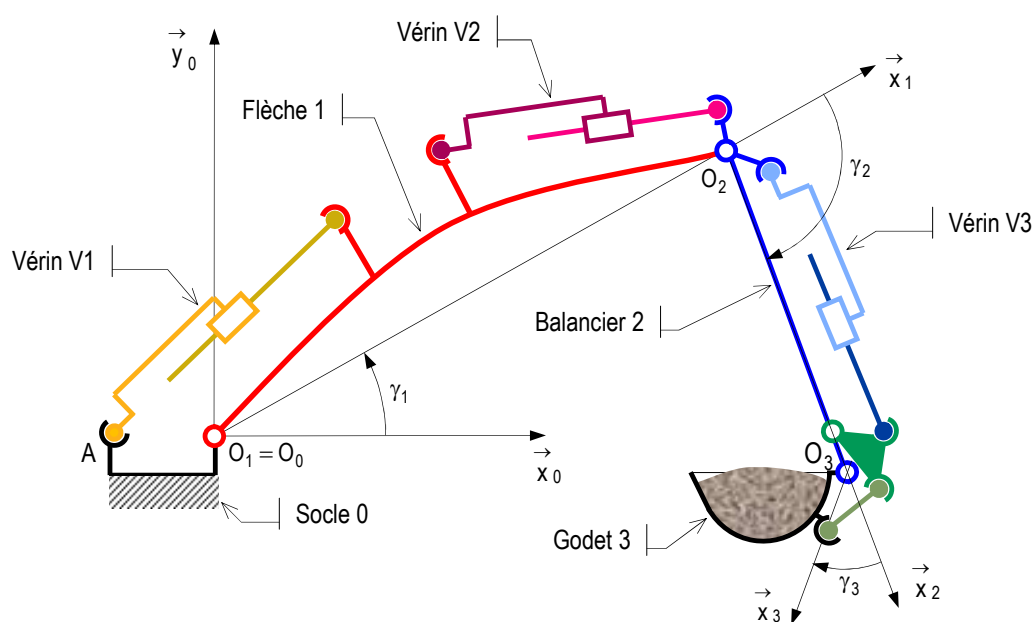


fig. 63

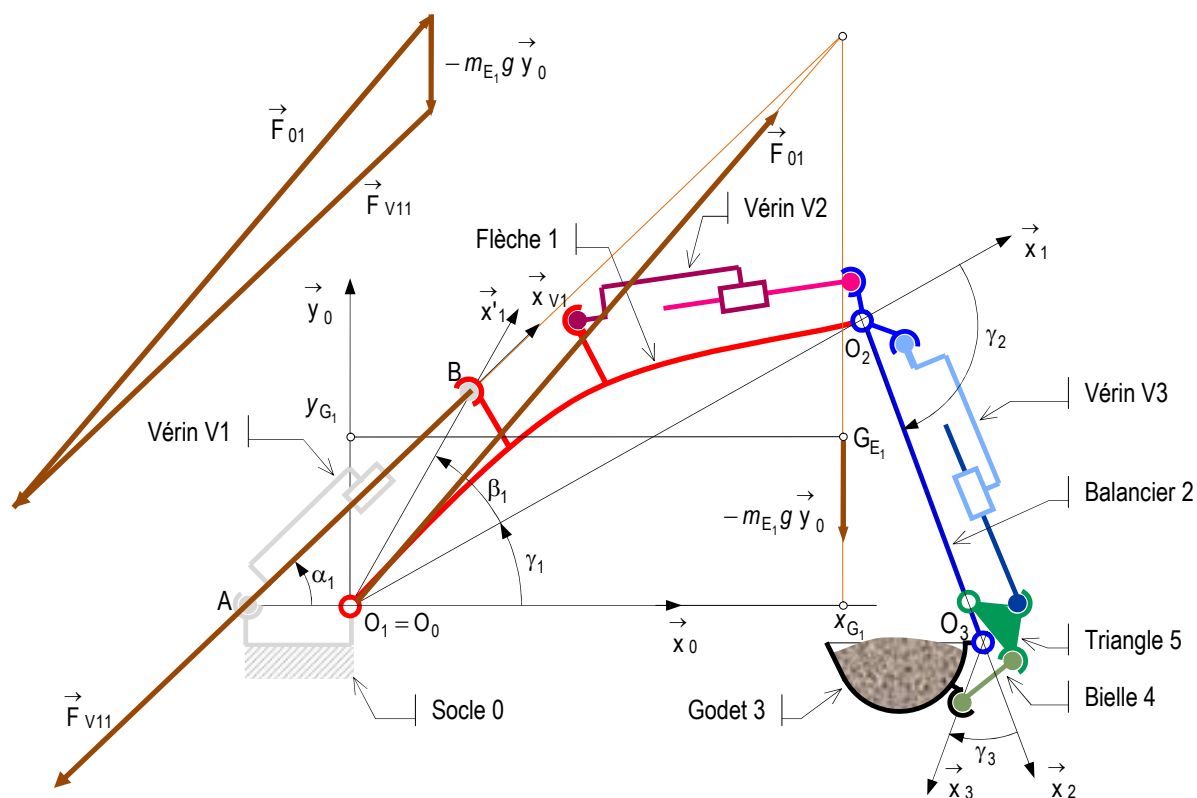


fig. 64



La quantité  $b \cos(\alpha_1 - \gamma_1) - a \sin(\alpha_1 - \gamma_1)$  représente le bras de levier de  $F_{V11} \times v_1$  (fig. 65).

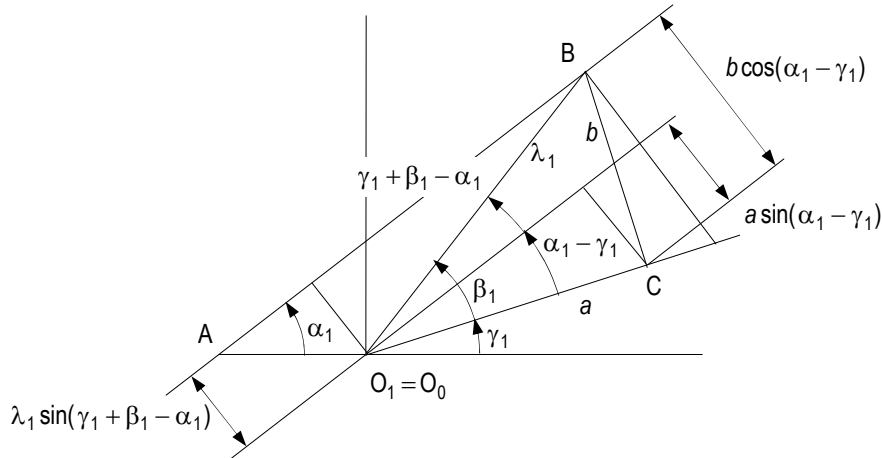


fig. 65

En utilisant un paramétrage tel que :

$$\vec{O_1B} = \lambda_1 \vec{x'_1}$$

Alors

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = (\vec{O_1B} \wedge F_{V11} \vec{x}_{v1}) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = F_{V11} \vec{x}_{v1} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{O_1B}) = F_{V11} \vec{x}_{v1} \cdot (\vec{z} \wedge \lambda_1 \vec{x'_1})$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = \lambda_1 F_{V11} \vec{x}_{v1} \cdot \vec{y'_1}$$

$$\left( \vec{x}_{v1} \cdot \vec{y'_1} \right) = \left( \vec{x}_{v1} \cdot \vec{x}_0 \right) + \left( \vec{x}_0 \cdot \vec{x'_1} \right) + \left( \vec{x'_1} \cdot \vec{y'_1} \right) = -\alpha_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = \lambda_1 F_{V11} \cos(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1 + \frac{\pi}{2}) = -\lambda_1 F_{V11} \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1)$$

$$F_{V11} = - \frac{m_{E_1} g x_{G_{E_1}}}{\lambda_1 \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1)}$$

La quantité  $\lambda_1 \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1)$  représente le bras de levier de  $F_{V11} \times v_1$  (fig. 65).

La fig. 65 montre que  $\lambda_1 \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1) = b \cos(\alpha_1 - \gamma_1) - a \sin(\alpha_1 - \gamma_1)$ .

### 3.4 Action mécanique du vérin V2 sur le balancier 2

#### Isolement du vérin V2

Comme le vérin V2 est lié au bras 1 et au balancier 2 par deux liaisons rotules et si la masse de V2 est négligée alors le vérin est

soumis à deux actions mécaniques en D et F,  $\vec{F}_{1V2}$  et  $\vec{F}_{2V2}$  :  $\vec{F}_{1V2} + \vec{F}_{2V2} = \vec{0}$

**Isolement de  $E_2 \equiv 2 \cup 3$  + charge  $\cup 4 \cup 5 \cup 3$**

L'équation torsorielle donne pour les trois actions mécaniques

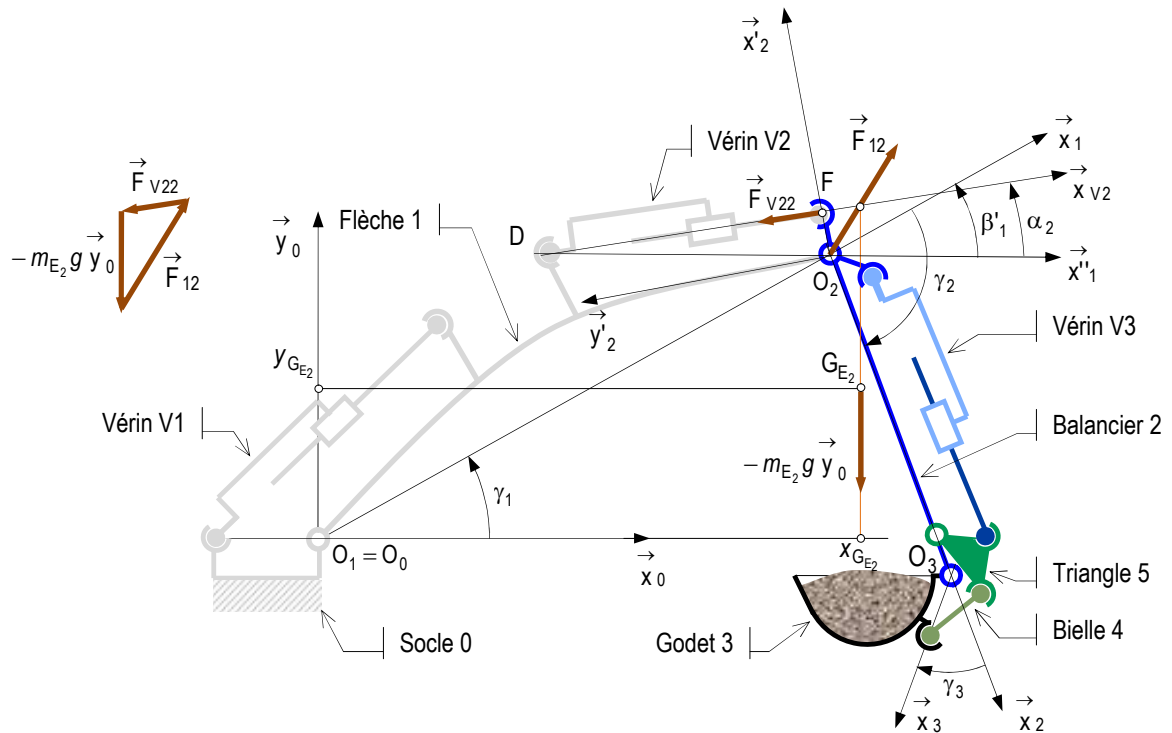
$$\{1 \rightarrow 2\} + \{V2 \rightarrow 2\} + \{\text{pes} \rightarrow E_2\} = \{0\}$$

Le torseur associé à la pesanteur est :

$$\{\text{pesanteur} \rightarrow E_2\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{pesanteur} \rightarrow E_2} = -m_{E_2} g \vec{y}_0 \\ \vec{M}_{G_{E_2}, \text{pesanteur} \rightarrow E_2} = \vec{0} \end{cases}$$

On traduit l'équilibre de l'ensemble avec une équation des moments en  $O_2$  en conséquence sur  $\vec{z}$ , soit :

$$\vec{M}_{O_2, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O_2, V2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O_2, \text{pes} \rightarrow E_2} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{M}_{O_2, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = 0 \text{ (liaison pivot sans frottement)}$$


*fig. 66*

$$\vec{O_2G_{E_2}} = \vec{O_2O_1} + \vec{O_1G_{E_2}} = -L_1 \vec{x_1} + x_{G_{E_2}} \vec{x_0} + y_{G_{E_2}} \vec{y_0}$$

$$\vec{M}_{O_2, pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = \underbrace{\vec{M}_{E_2, pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z}}_{=0} + \vec{z} \cdot (\vec{O_2 G_{E_2}} \wedge -m_{E_2} \vec{g} \vec{y}_0) = -m_{E_2} \vec{g} \vec{y}_0 \cdot (\vec{z} \wedge \vec{O_2 G_{E_2}})$$

$$\vec{M}_{O_2, \text{pes} \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = -m_{E_2} g \vec{y}_0 \cdot (\vec{z} \wedge (-L_1 \vec{x}_1 + x_{G_{E_2}} \vec{x}_0 + y_{G_{E_2}} \vec{y}_0)) = -m_{E_2} g (-L_1 \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 + x_{G_{E_2}}) = -m_{E_2} g (x_{G_{E_2}} - L_1 \cos \gamma_1)$$

$$\vec{M}_{O_2, v_2 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = \underbrace{\vec{M}_{F, v_2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}}_{=0} + (\vec{O_2 F} \wedge F_{v_{22}} \times v_2) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{M}_{O_2, v_2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = F_{v22} \vec{x}_{v2} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{O_2 F}) = F_{v22} \vec{x}_{v2} \cdot (\vec{z} \wedge (h \vec{y}_2 - e \vec{x}_2)) \text{ avec } \vec{O_2 F} = h \vec{y}_2 - e \vec{x}_2$$

$$\vec{M}_{O_2, v_2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = -F_{v22} (h \vec{x}_{v2} \cdot \vec{x}_2 + e \vec{x}_{v2} \cdot \vec{y}_2)$$

$$\vec{M}_{O_2, V2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = -F_{V22}(h \cos(\gamma_2 + \beta'_1 - \alpha_2) - e \sin(\gamma_2 + \beta'_1 - \alpha_2))$$

$$-m_{E_2} g(x_{G_{F_2}} - L_1 \cos \gamma_1) - F_{V22}(h \cos(\gamma_2 + \beta'_1 - \alpha_2) - e \sin(\gamma_2 + \beta'_1 - \alpha_2)) = 0$$

$$F_{V22} = -\frac{m_{E_2} g(x_{G_{E_2}} - L_1 \cos \gamma_1)}{h \cos(\gamma_2 + \beta'_1 - \alpha_2) - e \sin(\gamma_2 + \beta'_1 - \alpha_2)}$$

$$\vec{O_2F} = \delta \vec{x}'_2$$

alors 
$$\vec{M}_{O_2, V2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = \underbrace{\vec{M}_{F, V2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}}_{=0} + (\vec{O_2 F} \wedge F_{V22} \vec{x}_{V2}) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{M}_{O_2, V2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = F_K \vec{x}_{V2} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{O_2 F}) = F_{V22} \vec{x}_{V2} \cdot (\vec{z} \wedge \delta \vec{x}'_2)$$

Comme  $\vec{O_2 F} = h \vec{y}_2 - e \vec{x}_2$  alors  $\delta^2 = h^2 + e^2$

$$\vec{M}_{O_2, V2 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = \delta F_{V22} \vec{x}_{V2} \cdot \vec{y}'_2$$

avec 
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_{V2}, \vec{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{V2}, \vec{x}'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}'_1, \vec{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_1, \vec{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_2, \vec{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{y}_2, \vec{x}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}'_2, \vec{y}'_2 \end{pmatrix} = -\alpha_2 + \beta'_1 + \gamma_2 + \beta_2 + \pi$$

$$\vec{M}_{O_2, V2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = \delta F_{V22} \cos(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2 - \alpha_2 + \pi)$$

$$\vec{M}_{O_2, V2 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = -\delta F_{V22} \cos(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2 - \alpha_2)$$

$$F_{V22} = -\frac{m_{E_2} g (x_{G_{E_2}} - L_1 \cos \gamma_1)}{\delta \cos(\gamma_2 + \beta'_1 + \beta_2 - \alpha_2)}$$

### 3.5 Action mécanique du vérin V3 sur le triangle 5

#### Isolement de la bielle 4

La bielle 4 est soumise à deux efforts  $\vec{F}_{34}$  en K et  $\vec{F}_{54}$  en I si sa masse est négligée.

$$\vec{F}_{54} + \vec{F}_{34} = \vec{0}$$

#### Isolement du vérin de cavage V3

Comme le vérin V3 est lié au balancier 2 et au triangle 5 par deux liaisons rotules et si la masse de V3 est négligée alors le vérin est

soumis à deux actions mécaniques en I et G,  $\vec{F}_{5V3}$  et  $\vec{F}_{2V3}$  :  $\vec{F}_{5V3} + \vec{F}_{2V3} = \vec{0}$

#### Isolement de $E_3 = 3 \cup$ charge

Le godet 3 avec son chargement est soumis à deux actions mécaniques  $\vec{F}_{43} = F_{43} \vec{x}_4$  (théorème des actions mutuelles) et  $\vec{F}_{23}$  et à son poids  $-m_{E_3} g \vec{y}_0$

L'équation des moments en  $O_3$  en conséquence sur  $\vec{z}$  donne :

$$\underbrace{\vec{M}_{O_3, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}}_{=0} + \vec{M}_{O_3, pes \rightarrow E_3} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O_3, 4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{M}_{O_3, pes \rightarrow E_3} \cdot \vec{z} = O_3 G_{E_3} \cdot (-m_{E_3} g \vec{y}_0 \wedge \vec{z})$$

$$\vec{M}_{O_3, pes \rightarrow E_3} \cdot \vec{z} = -m_{E_3} g x_0 \cdot O_3 G_{E_3}$$

On pose  $O_3 G_{E_3} = x_{G_{E_3}} \vec{x}_3 + y_{G_{E_3}} \vec{y}_3$

alors  $\vec{M}_{O_3, pes \rightarrow E_3} \cdot \vec{z} = -m_{E_3} g x_0 \cdot (x_{G_{E_3}} \vec{x}_3 + y_{G_{E_3}} \vec{y}_3)$

$$\vec{M}_{O_3, pes \rightarrow E_3} \cdot \vec{z} = -m_{E_3} g x_{G_{E_3}} x_0 \cdot x_3 - m_{E_3} g y_{G_{E_3}} x_0 \cdot y_3$$

$$\vec{M}_{O_3, pes \rightarrow E_3} \cdot \vec{z} = -m_{E_3} g x_{G_{E_3}} \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + m_{E_3} g y_{G_{E_3}} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

car  $(x_0, x_3) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  et  $(x_0, y_3) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \frac{\pi}{2}$

$$\vec{M}_{O_3, 4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = \underbrace{\vec{M}_{K, 4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}}_{=0} + (O_3 K \wedge F_{43} \vec{x}_4) \cdot \vec{z}$$

avec  $O_3 K = L_3 \vec{x}_3$

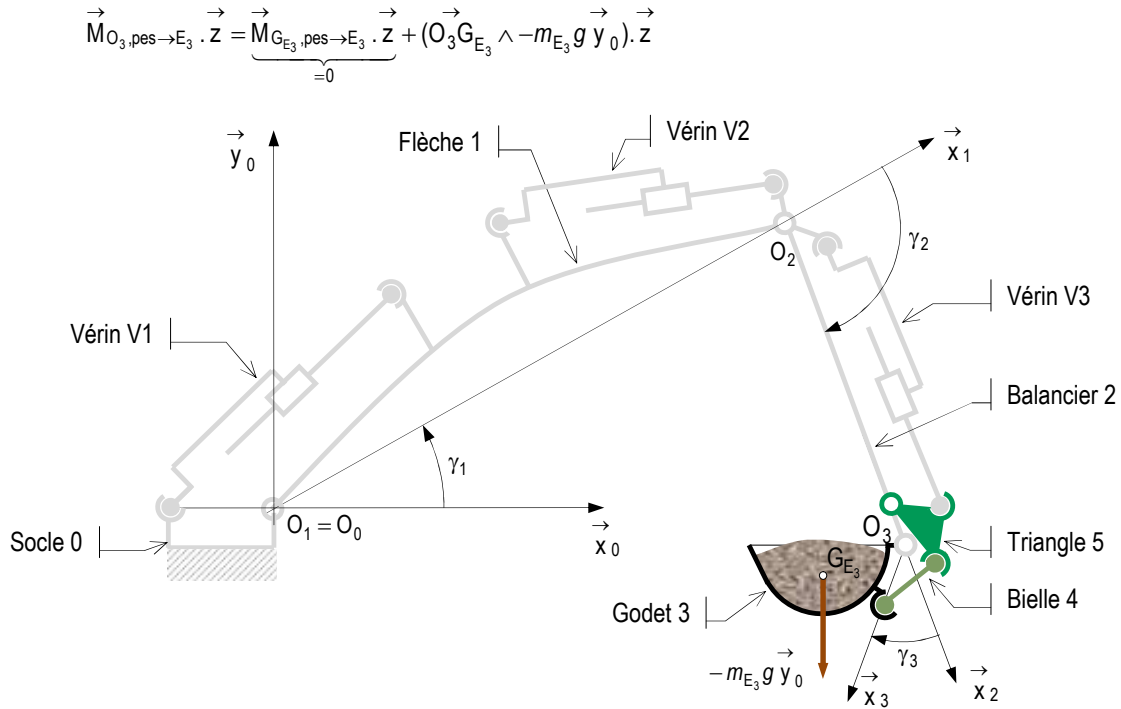


fig. 67

$$\vec{M}_{O_3,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = (L_3 \vec{x}_3 \wedge F_{43} \vec{x}_4) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{M}_{O_3,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = F_{43} \vec{x}_4 \cdot (\vec{z} \wedge L_3 \vec{x}_3) = F_{43} L_3 \vec{x}_4 \cdot \vec{y}_3$$

comme  $(\vec{x}_3, \vec{x}_4) = \gamma_4 - \gamma_3$ , l'angle  $\gamma_4$  est déterminé au §3.4.4,

alors  $\vec{M}_{O_3,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = F_{43} L_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_3)$

L'équation des moment devient :

$$F_{43} L_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_3) - m_{E_3} g x_{G_{E_3}} \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + m_{E_3} g y_{G_{E_3}} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) = 0$$

soit

$$F_{43} = \frac{m_{E_3} g (x_{G_{E_3}} \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) - y_{G_{E_3}} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3))}{L_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_3)}$$

**Isolement du triangle 5**

L'équation des moments en H en conséquence sur  $\vec{z}$  donne :

$$\underbrace{\vec{M}_{H,2 \rightarrow 5} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{H,4 \rightarrow 5} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{H,V3 \rightarrow 5} \cdot \vec{z}}_{=0} = 0$$

$$\underbrace{\vec{M}_{I,4 \rightarrow 5} \cdot \vec{z} + (HJ \wedge \vec{F}_{45}) \cdot \vec{z}}_{=0} + \underbrace{\vec{M}_{J,V3 \rightarrow 5} \cdot \vec{z} + (HJ \wedge \vec{F}_{V35}) \cdot \vec{z}}_{=0} = 0$$

avec

$$HJ = l \vec{x}'_5$$

$$HI = L_5 \vec{x}_5$$

$$\vec{F}_{45} = -\vec{F}_{43} = -F_{43} \vec{x}_4$$

alors

$$L_5 \vec{x}_5 \cdot (-F_{43} \vec{x}_4 \wedge \vec{z}) + l \vec{x}'_5 \cdot (F_{V35} \vec{x}_{V3} \wedge \vec{z}) = 0$$

soit

$$F_{43} L_5 \vec{x}_5 \cdot \vec{y}_4 - F_{V35} l \vec{x}'_5 \cdot \vec{y}_{V3} = 0$$

$$\left( \vec{x}_5 \cdot \vec{y}_4 \right) = \left( \vec{x}_5 \cdot \vec{x}_2 \right) + \left( \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_4 \right) + \left( \vec{x}_4 \cdot \vec{y}_4 \right) = -\gamma_5 + \gamma_4 + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \left( \vec{x}'_5 \cdot \vec{y}_{V3} \right) &= \left( \vec{x}'_5 \cdot \vec{x}_5 \right) + \left( \vec{x}_5 \cdot \vec{x}_2 \right) + \left( \vec{x}_2 \cdot \vec{x}''_2 \right) + \left( \vec{x}''_2 \cdot \vec{x}_{V3} \right) + \left( \vec{x}_{V3} \cdot \vec{y}_{V3} \right) = -\beta_5 - \gamma_5 - \beta'_2 + \alpha_3 + \frac{\pi}{2} \\ -F_{43}L_5 \sin(-\gamma_5 + \gamma_4) + F_{V35}l \sin(-\beta_5 - \gamma_5 - \beta'_2 + \alpha_3) &= 0 \\ F_{V35} &= \frac{F_{43}L_5 \sin(-\gamma_5 + \gamma_4)}{l \sin(-\beta_5 - \gamma_5 - \beta'_2 + \alpha_3)} \end{aligned}$$

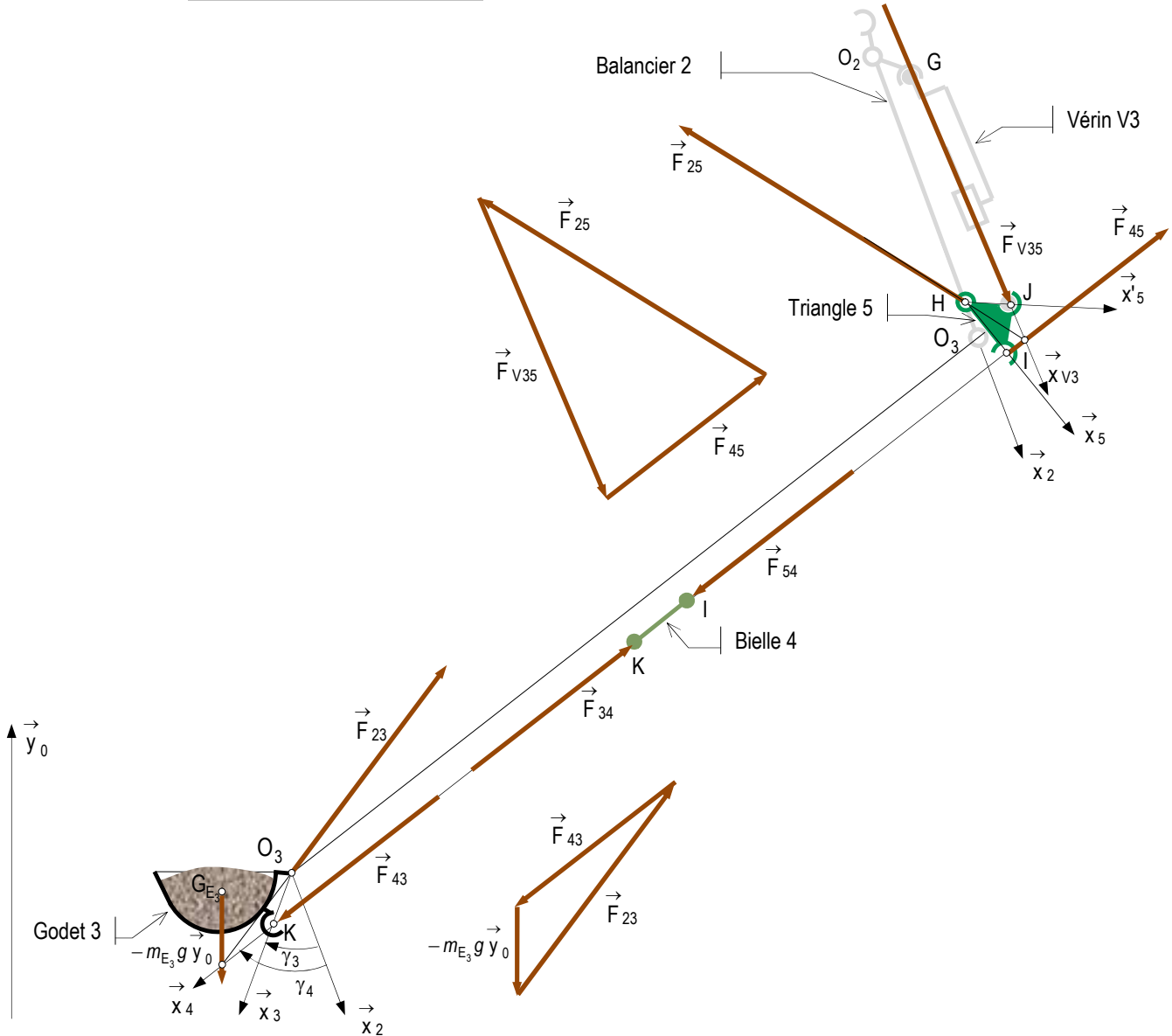


fig. 68

### 3.6 Détermination des centres de masses

Dans le cas d'un ensemble composé de  $n$  sous-ensembles dont les centres de gravité sont  $G_i$  et les masses  $m_i$ , le centre de gravité de l'ensemble est le barycentre des centres de gravité  $G_i$  pondérés par les masses  $m_i$  :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{OG}_i$$

où  $m$  est la masse totale,  $m = \sum_{i=1}^n m_i$

Pour l'ensemble  $E \equiv 1 \cup 2 \cup (3 \cup \text{charge}) \cup 4 \cup 5 \cup V2 \cup V3$  de masse  $m_E$  et de centre de masse  $G_E$

$$\vec{O_1 G_E} = \frac{m_1 \vec{O_1 G_1} + m_2 \vec{O_1 G_2} + m_3 \vec{O_1 G_3} + m_4 \vec{O_1 G_4} + m_5 \vec{O_1 G_5} + m_{2''} \vec{O_1 G_{2''}} + m_{2'} \vec{O_1 G_{2'}} + m_{3''} \vec{O_1 G_{3''}} + m_{3'} \vec{O_1 G_{3'}}}{m_E}$$

avec  $m_E = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_{2''} + m_{2'} + m_{3''} + m_{3'}$ .

#### Détermination du centre de masse de chaque solide

Toutes les vecteurs positions des centres de masse doivent être exprimés dans le repère 0 lié au Bâti.

Les centres de masse sont donnés dans SolidWorks.

Notations :

- La notation  $\vec{O_i O_j} \Big|_{B_i}$  signifie que le vecteur  $\vec{O_i O_j}$  est exprimé dans la base  $B_i$  ;

-  $B_{i,j}$  est la matrice de passage de la base  $B_i$  vers la base  $B_j$  ;

- afin de simplifier l'écriture des changements de bases on utilise les notations suivantes  $c\gamma \equiv \cos \gamma$  et  $s\gamma \equiv \sin \gamma$

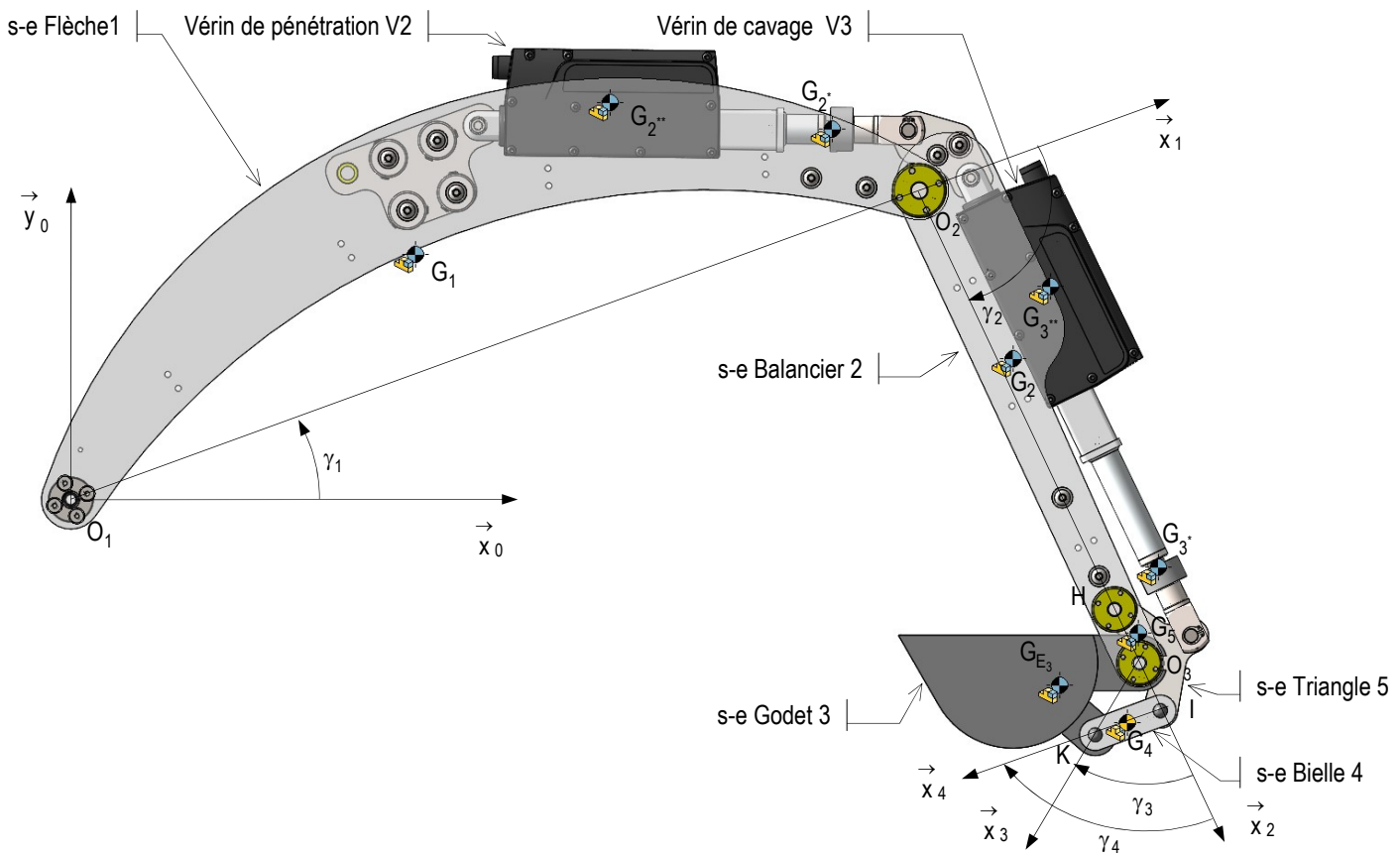


fig. 69

La simulation du §4.2 avec Méca3D donne dans l'onglet « résultats » → « courbes » la position du centre de masse de l'ensemble  $E_1$  au cours de l'évolution du bras (voir §3.6). En conséquence la détermination numérique de l'effort dans le vérin de flèche §3.3 est possible.

#### 3.6.1 Détermination de $\vec{O_1 G_1}$

$$\vec{O_1 G_1} \Big|_{B_0} = B_{0,1} \vec{O_1 G_1} \Big|_{B_1}$$

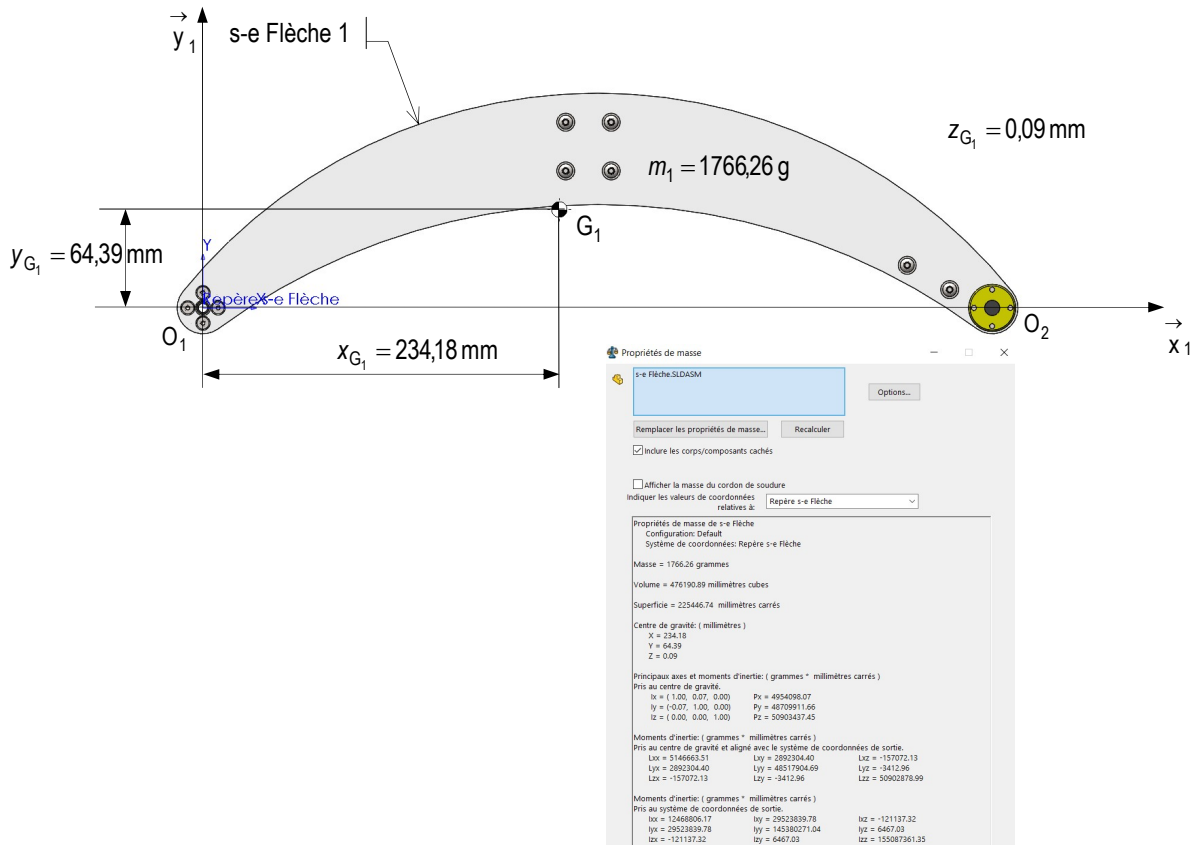


fig. 70 : s-e Flèche

avec

$$B_{0,1} = \begin{pmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{O_1G_1} \Big|_{B_1} = \begin{pmatrix} x_{G_1} \\ y_{G_1} \\ z_{G_1} \end{pmatrix}$$

### 3.6.2 Détermination de $\vec{O_1G_2}$

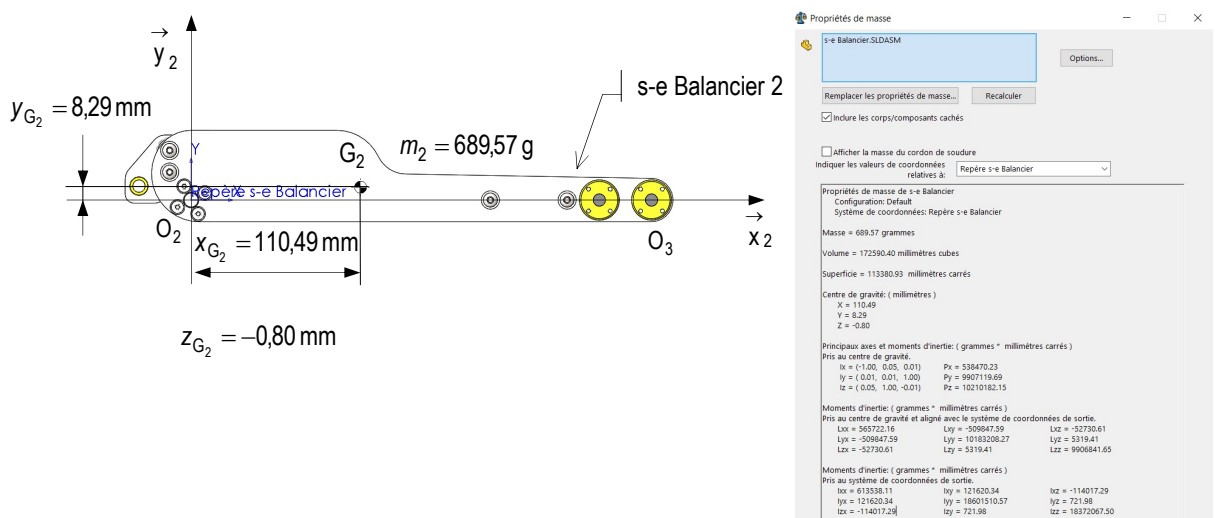


fig. 71 : s-e Balancier



$$\vec{O}_1 G_2 = \vec{O}_1 O_2 + \vec{O}_2 G_2$$

$$\vec{O}_1 G_2 \Big|_{B_0} = B_{0,1} \cdot \vec{O}_1 O_2 \Big|_{B_1} + B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot \vec{O}_2 G_2 \Big|_{B_2}$$

Avec

$$B_{1,2} = \begin{pmatrix} c\gamma_2 & -s\gamma_2 & 0 \\ s\gamma_2 & c\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \vec{O}_1 O_2 \Big|_{B_1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{O}_2 G_2 \Big|_{B_2} = \begin{pmatrix} x_{G_2} \\ y_{G_2} \\ z_{G_2} \end{pmatrix}$$

### 3.6.3 Détermination de $\vec{O}_1 G_3$

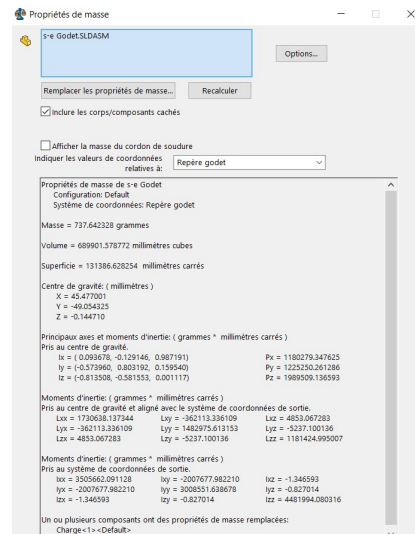
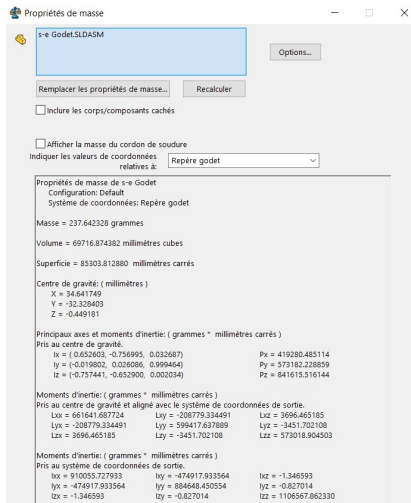
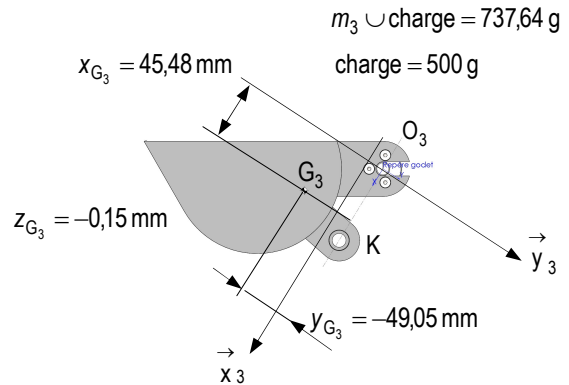
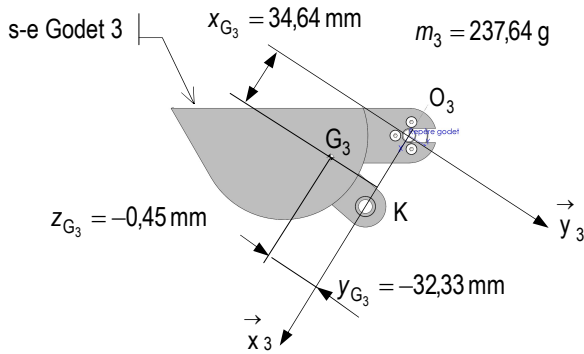


fig. 72 :  $\vec{O}_3 G_3$  avec et sans charge dans le godet

$$\vec{O}_1 G_3 = \vec{O}_1 O_2 + \vec{O}_2 O_3 + \vec{O}_3 G_3$$

avec

$$\vec{O}_3 G_3 \Big|_{B_3} = \begin{pmatrix} x_{G_3} \\ y_{G_3} \\ z_{G_3} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{O}_2 O_3 \Big|_{B_2} = \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{O}_1 G_3 \Big|_{B_0} = B_{0,1} \cdot \vec{O}_1 O_2 \Big|_{B_1} + B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot \vec{O}_2 O_3 \Big|_{B_2} + B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot B_{2,3} \cdot \vec{O}_3 G_3 \Big|_{B_3}$$

avec 
$$B_{2,3} = \begin{pmatrix} c\gamma_3 & -s\gamma_3 & 0 \\ s\gamma_3 & c\gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rq : un calcul numérique doit tenir compte de la charge dans le godet pour connaître les coordonnées de  $\vec{O}_3G_3$ .

### 3.6.4 Détermination de $\vec{O}_1G_4$

Avec 
$$\vec{KG}_4 \Big|_{B_4} = \begin{pmatrix} -L_4 + x_{G_4} \\ y_{G_4} \\ z_{G_4} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{O}_3K \Big|_{B_3} = \begin{pmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{O}_1G_4 \Big|_{B_0} = B_{0,1} \cdot \vec{O}_1O_2 \Big|_{B_1} + B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot \vec{O}_2O_3 \Big|_{B_2} + B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot B_{2,3} \cdot \vec{O}_3K \Big|_{B_3} + B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot B_{2,3} \cdot B_{3,4} \cdot \vec{KG}_4 \Big|_{B_4}$$

avec 
$$B_{3,4} = \begin{pmatrix} c\gamma_4 & -s\gamma_4 & 0 \\ s\gamma_4 & c\gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_4 = 45,79 \text{ g}$$

$$y_{G_4} = 0 \text{ mm}$$

$$z_{G_4} = -0,63 \text{ mm}$$

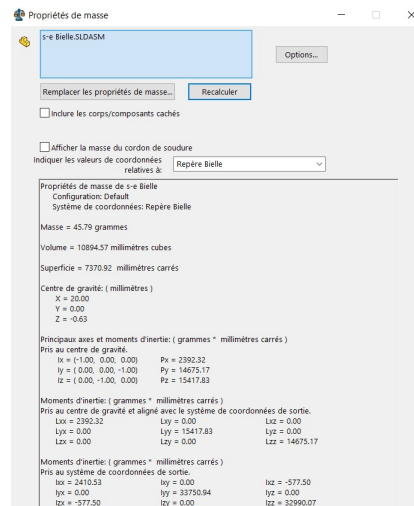
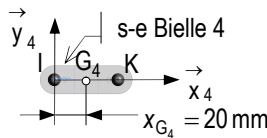


fig. 73 : s-e Bielle

### 3.6.5 Détermination de $\vec{O}_1G_5$

avec 
$$\vec{HG}_5 \Big|_{B_5} = \begin{pmatrix} x_{G_5} \\ y_{G_5} \\ z_{G_5} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{O}_2H \Big|_{B_2} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{O}_1G_5 \Big|_{B_0} = B_{0,1} \cdot \vec{O}_1O_2 \Big|_{B_1} + B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot \vec{O}_2H \Big|_{B_2} + B_{0,1} \cdot B_{2,5} \cdot \vec{HG}_5 \Big|_{B_5}$$

avec 
$$B_{2,5} = \begin{pmatrix} c\gamma_5 & -s\gamma_5 & 0 \\ s\gamma_5 & c\gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

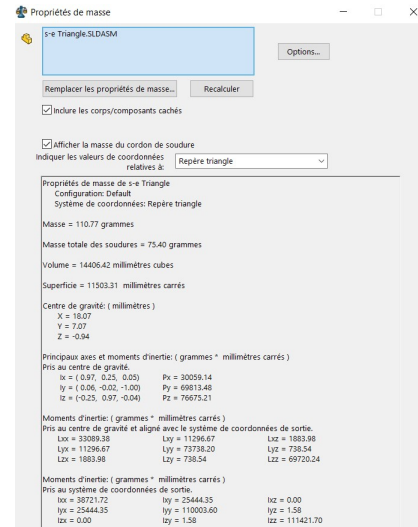
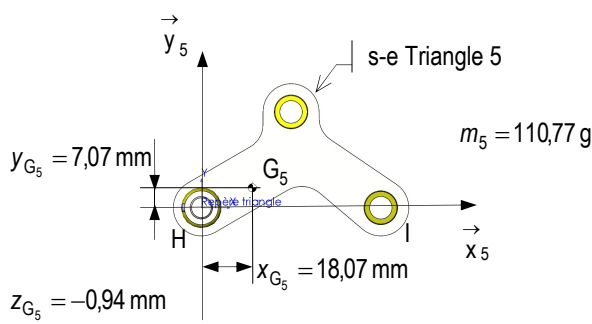


fig. 74 : s-e Triangle

### 3.6.6 Détermination de $\vec{O}_1\vec{G}_2^{**}$

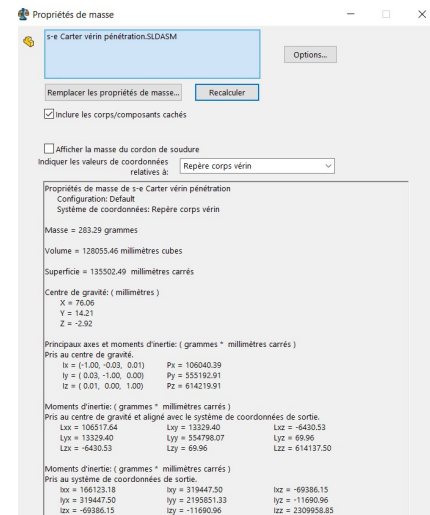
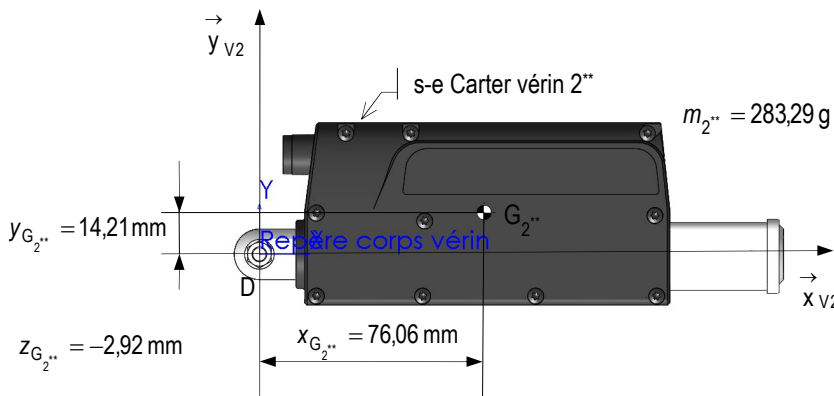


fig. 75 : Carter du vérin de pénétration V2

$$\vec{O}_1\vec{G}_2^{**} = \vec{O}_1\vec{D} + \vec{D}\vec{G}_2^{**}$$

avec

$$\vec{O}_1\vec{D} \Big|_{B_1} = \begin{pmatrix} L_1 - d \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{D}\vec{G}_2^{**} \Big|_{B_{V2}} = \begin{pmatrix} x_{G_2^{**}} \\ y_{G_2^{**}} \\ z_{G_2^{**}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{O}_1\vec{G}_2^{**} \Big|_{B_0} = B_{0,1} \cdot \vec{O}_1\vec{D} \Big|_{B_1} + B_{0,1} \cdot B_{1,V2} \cdot \vec{D}\vec{G}_2^{**} \Big|_{B_{V2}}$$

comme  $\begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_{V2} \end{pmatrix} = \alpha_2 - \beta'_1$  alors  $B_{1,V2} = \begin{pmatrix} c(\alpha_2 - \beta'_1) & -s(\alpha_2 - \beta'_1) & 0 \\ s(\alpha_2 - \beta'_1) & c(\alpha_2 - \beta'_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### 3.6.7 Détermination de $\vec{O}_1G_2$

$$\vec{O}_1G_2 = \vec{O}_1D + \vec{DF} + \vec{FG}_2$$

avec

$$\vec{DF} \Big|_{B_{V2}} = \begin{pmatrix} l_2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{FG}_2 \Big|_{B_{V2}} = \begin{pmatrix} x_{G_2} \\ y_{G_2} \\ z_{G_2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{O}_1G_2 \Big|_{B_0} = B_{0,1} \vec{O}_1D \Big|_{B_1} + B_{0,1} B_{1,V2} \vec{DF} \Big|_{B_{V2}} + B_{0,1} B_{1,V2} \vec{DG}_2 \Big|_{B_{V2}}$$

comme  $\begin{pmatrix} \vec{x}_1, \vec{x}_{V2} \end{pmatrix} = \alpha_2 - \beta'_1$  alors  $B_{1,V2} = \begin{pmatrix} c(\alpha_2 - \beta'_1) & -s(\alpha_2 - \beta'_1) & 0 \\ s(\alpha_2 - \beta'_1) & c(\alpha_2 - \beta'_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

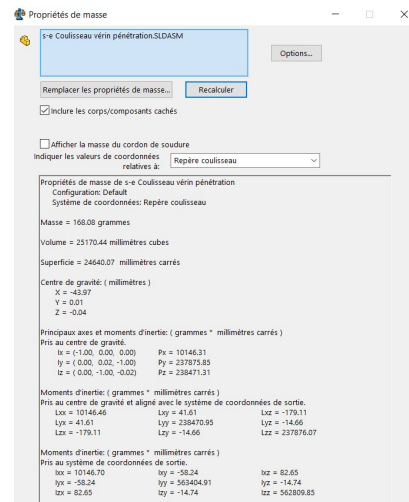
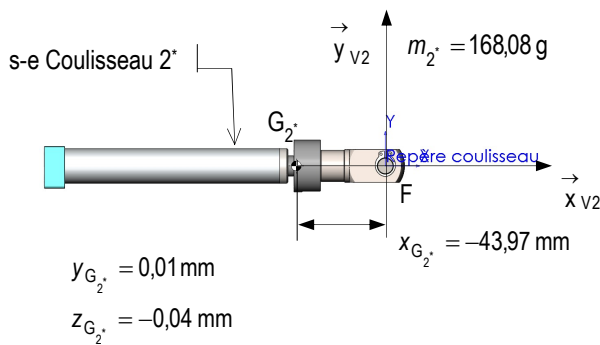


fig. 76 : Tige du vérin de pénétration V2

### 3.6.8 Détermination de $\vec{O}_1G_3$

Le vérin de cage V3 est identique au vérin de pénétration V2. Il suffit de remplacer l'indice 2 par l'indice 3.

$$\vec{O}_1G_3 = \vec{O}_1O_2 + \vec{O}_2G + \vec{GG}_3$$

avec

$$\vec{O}_2G \Big|_{B_2} = \begin{pmatrix} n \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{GG}_3 \Big|_{B_{V3}} = \begin{pmatrix} x_{G_3} \\ y_{G_3} \\ z_{G_3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{O}_1G_3 \Big|_{B_0} = B_{0,1} \vec{O}_1O_2 \Big|_{B_1} + B_{0,1} B_{1,2} \vec{O}_2G \Big|_{B_2} + B_{0,1} B_{1,2} B_{2,V3} \vec{GG}_3 \Big|_{B_{V3}}$$

comme  $\begin{pmatrix} \vec{x}_2, \vec{x}_{V3} \end{pmatrix} = \alpha_3 - \beta'_2$  alors  $B_{2,V3} = \begin{pmatrix} c(\alpha_3 - \beta'_2) & -s(\alpha_3 - \beta'_2) & 0 \\ s(\alpha_3 - \beta'_2) & c(\alpha_3 - \beta'_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### 3.6.9 Détermination de $\vec{O}_1G_3$

$$\vec{O}_1G_3 = \vec{O}_1O_2 + \vec{O}_2G + \vec{GJ} + \vec{JG}_3$$

avec 
$$\vec{GJ} \Big|_{B_{V3}} = \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{JG_3^*} \Big|_{B_{V3}} = \begin{pmatrix} x_{G_3^*} \\ y_{G_3^*} \\ z_{G_3^*} \end{pmatrix}$$

$$\vec{O_1G_3^*} \Big|_{B_0} = B_{0,1} \vec{O_1O_2} \Big|_{B_1} + B_{0,1} B_{1,2} \vec{O_2G} \Big|_{B_2} + B_{0,1} B_{1,2} B_{2,V3} \vec{GJ} \Big|_{B_{V3}} + B_{0,1} B_{1,2} B_{2,V3} \vec{JG_3^*} \Big|_{B_{V3}}$$

comme  $\begin{pmatrix} \vec{x_2}, \vec{x_{V3}} \end{pmatrix} = \alpha_3 - \beta'_2$  alors  $B_{2,V3} = \begin{pmatrix} c(\alpha_3 - \beta'_2) & -s(\alpha_3 - \beta'_2) & 0 \\ s(\alpha_3 - \beta'_2) & c(\alpha_3 - \beta'_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque :

La feuille de calcul d'Excel « cdg 1U2 » donne le résultat pour la flèche 1 avec le balancier 2.

## 4 Modélisation dynamique

### 4.1 Analyse mécanique

La recherche du degré d'hyperstatisme de la pelleteuse, en configuration simplifiée, est identique à celle effectuée au § 3.2. La solution isostatique est donnée au § 3.1.

Pour une simulation dynamique de la maquette numérique avec Méca3D il convient de la modéliser sans surabondance géométrique. Il faut remplacer certaines liaisons pivot par des liaisons rotule en utilisant pour créer la liaison la « géométrie par objets ».

Une liaison rotule est définie par une face sphérique ou un point sur l'une des pièces.

Le repère idéal de la liaison est déterminé de la façon suivante:

- l'origine se trouve au centre de la face sphérique ou au point ;
- les axes coïncident avec ceux du repère général.

Il est possible de saisir une entité supplémentaire de type "ligne" pour définir un repère de liaison différent du repère général. Cette entité permettra de définir l'axe X du repère de liaison (surface cylindrique par exemple → axe X = axe du cylindre);

Le repère de la liaison sera alors attaché à la pièce à laquelle appartient cette seconde entité (fig. 77).

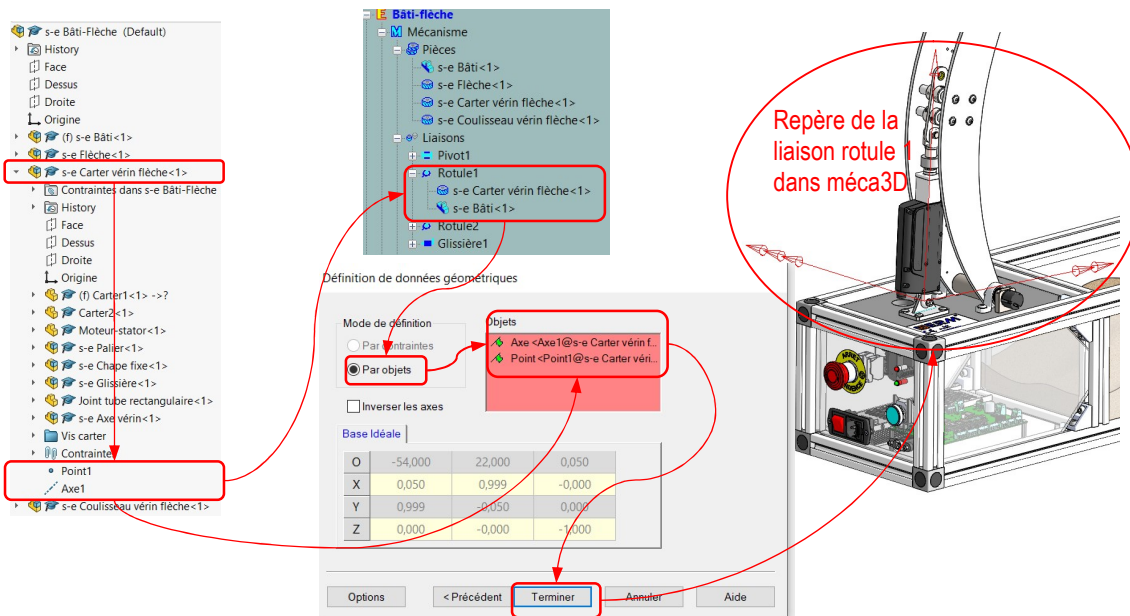


fig. 77 : Construction d'une liaison rotule dans Méca 3D

### 4.2 Simulation dynamique de la pelleteuse

Avec Méca3D on souhaite déterminer les charges sur les coulisseaux des trois vérins pour des mouvements connus de la flèche 1, du balancier 2 et du godet 3.

#### 4.2.1 Contraintes cinématiques

En situation initiale l'angle  $\gamma_1 = 20^\circ$ ,  $\gamma_2 = -85^\circ$  et le godet 3 est orienté par  $\gamma_3$  (fig. 78).

On désire que  $\vec{x}'_3$  soit tel que  $(\vec{x}'_3, \vec{x}_0) = 180^\circ$  afin que le godet reste « horizontal ».

$$(\vec{x}'_3, \vec{x}_0) = (\vec{x}'_3, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_2) + (\vec{x}_2, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_0)$$

$$180 = \beta_3 - \gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\gamma_3 = -180 + \beta_3 - \gamma_2 - \gamma_1$$

Comme  $(\vec{x}'_3, \vec{x}_3) = \beta_3 \cong 58,374^\circ$  alors en situation initiale  $\gamma_3 = -180 + 58,374 + 85 - 20 \cong -56,626^\circ$  (cet angle est légèrement plus grand que celui indiqué au §1.16 mais reste admissible pour éviter les collisions)

Lorsque les coordonnées articulaires évoluent :  $20^\circ \leq \gamma_1 \leq 65^\circ$  et  $-85^\circ \leq \gamma_2 \leq -130^\circ$ , l'angle  $\gamma_3 \cong -56,626^\circ$  reste constant (fig. 79).

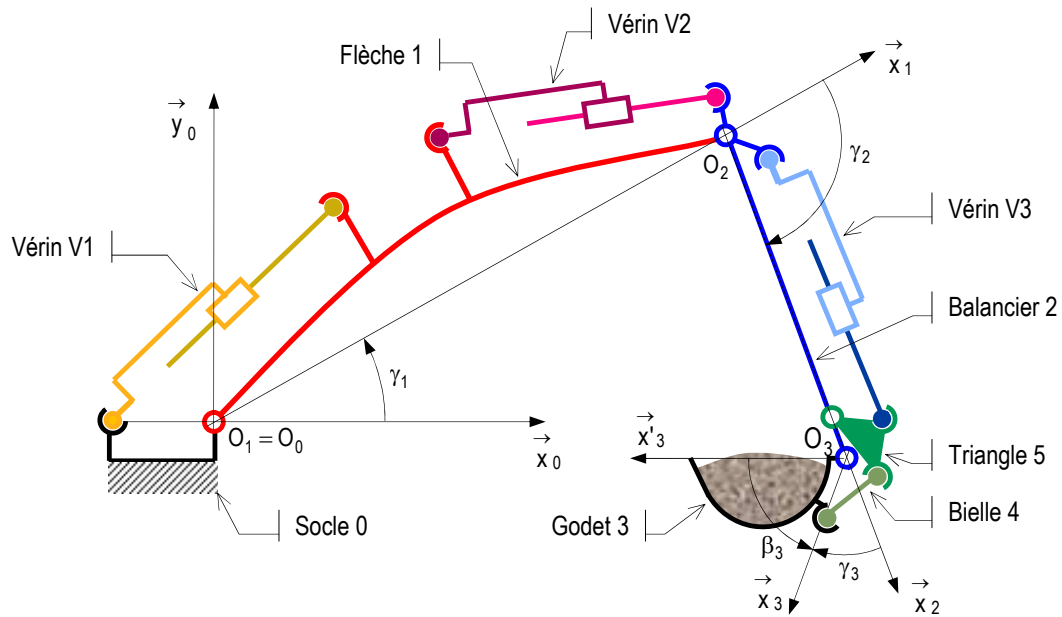


fig. 78

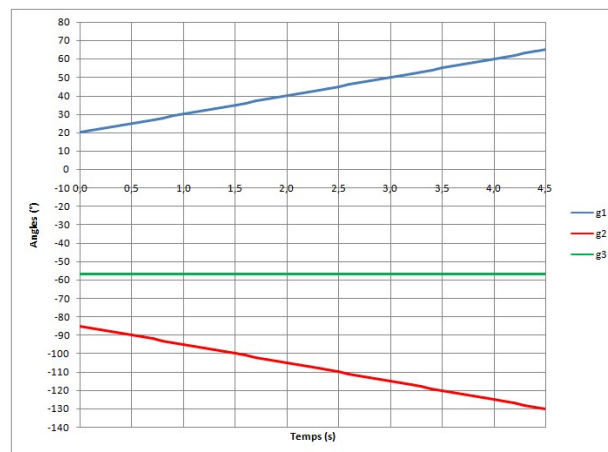


fig. 79 : Evolution des angles  $\gamma_1$  ( $g_1$ ),  $\gamma_2$  ( $g_2$ ) et  $\gamma_3$  ( $g_3$ ) en fonction du temps

#### 4.2.2 Modélisation cinématique dans Méca3D

Dans SolidWorks la position initiale des éléments de la maquette est fixée par les contraintes actives fig. 80.



fig. 80

La fig. 81 montre l'arbre de construction des pièces et des liaisons (construction isostatique) ainsi que le graphe de structure. Il convient ensuite de créer les courbes pilotes fig. 82 issues de la fig. 79 pour Méca3D.

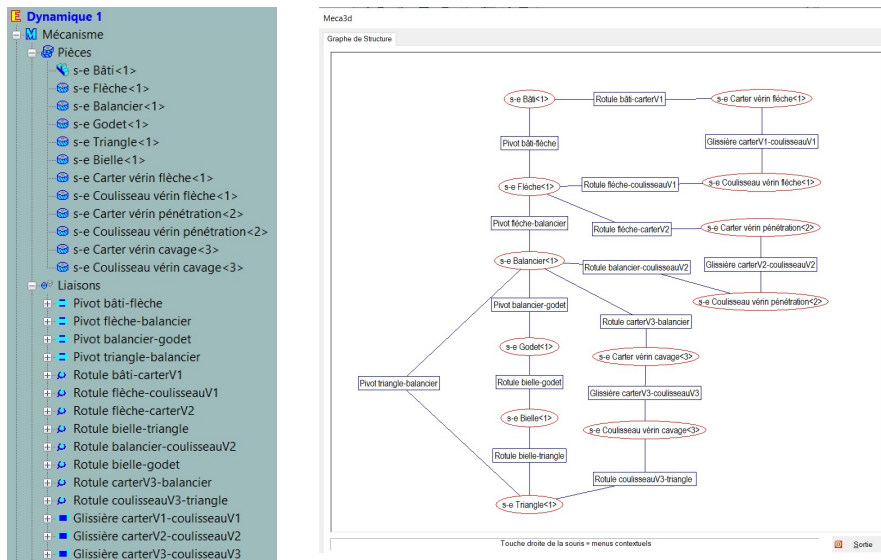


fig. 81

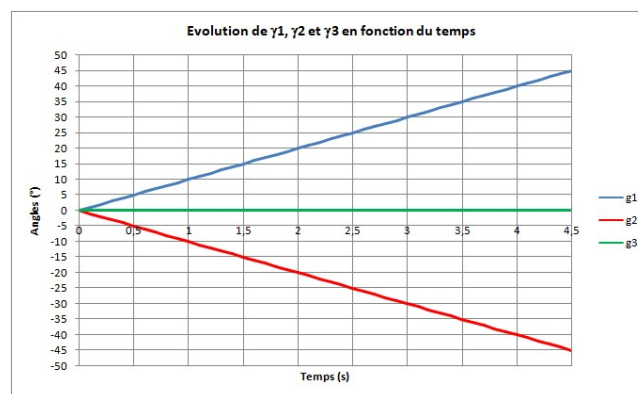


fig. 82



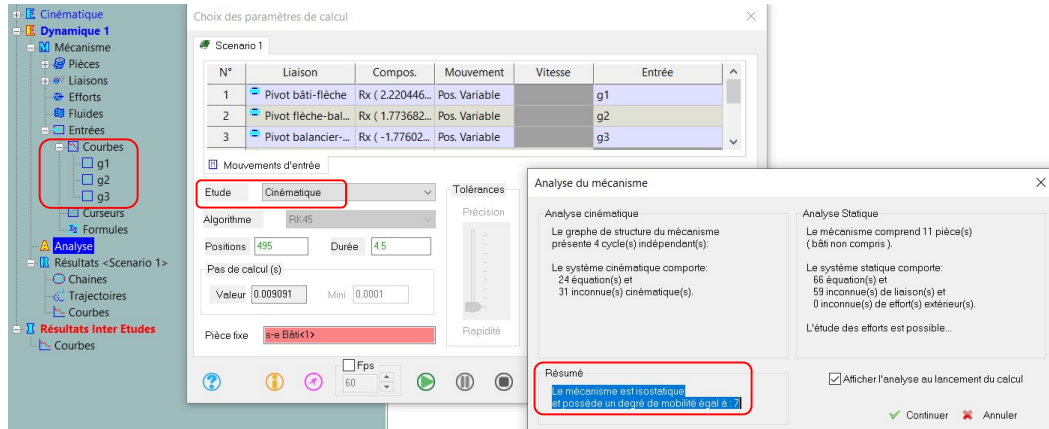


fig. 83

La fig. 84 montre l'image de la maquette numérique de la pelleteuse en situation initiale et en situation finale.

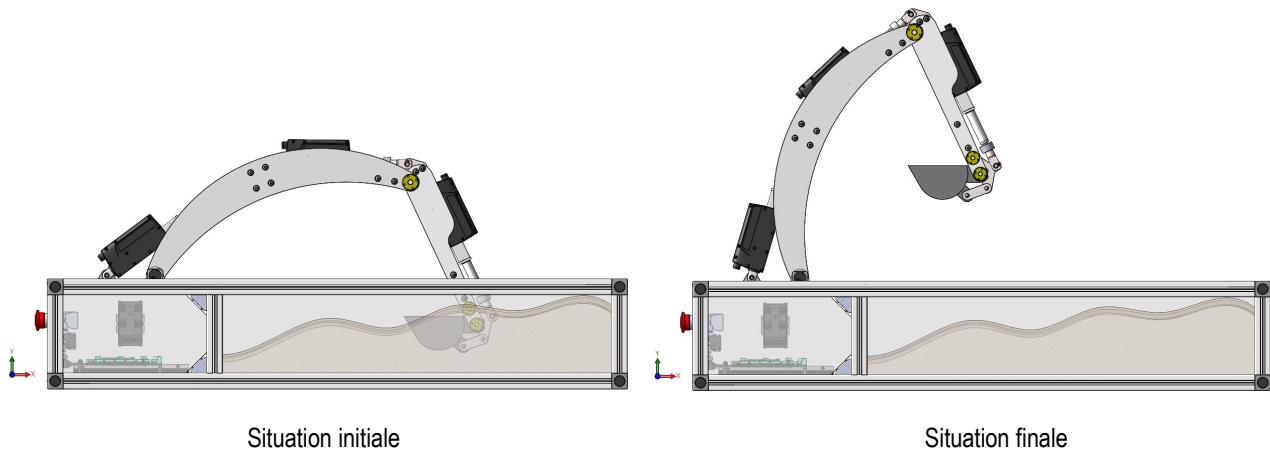


fig. 84

#### 4.2.3 Modélisation dynamique dans Méca3D

La recherche avec Méca3D des efforts fournis par les vérins nécessite la connaissance des déplacements des coulisseaux en fonction du temps. A un effort inconnu doit correspondre un mouvement connu.

Les résultats de l'étude cinématique précédente fournissent les positions des coulisseaux des vérins par rapport aux carter et peuvent être enregistrés au format.txt, ouverts dans Excel puis exportés dans Méca3D afin d'obtenir les fichiers .crb. La fig. 85 donne les déplacements des coulisseaux par rapport aux carter des vérins V1 et V2. Le coulisseau du vérin V3 est immobile par rapport au carter. La fig. 86 montre dans Méca3D les trois courbes pilotes des vérins ( $l_3=0$  pendant toute la durée du mouvement).

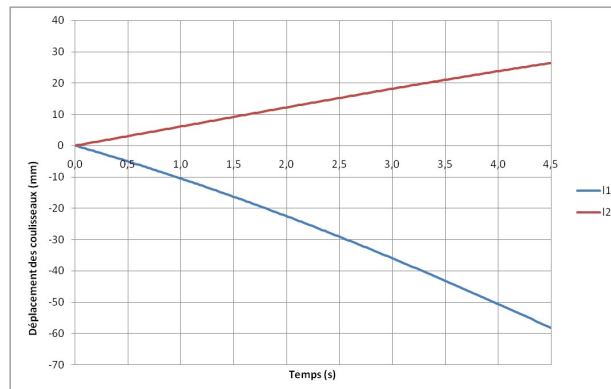


fig. 85 : Déplacements des coulisseaux par rapport aux carter des vérins V1 et V2

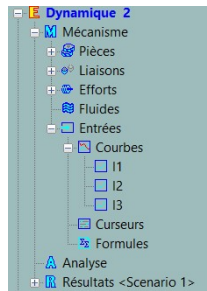


fig. 86 : Courbes pilotes des vérins

L'étude cinématique indique que la pelleteuse isostatique possède 7 degrés de mobilité (3 mobilités utiles : les déplacements des coulisseaux des vérins et 4 mobilités internes : les rotations des vérins et la rotation de la bielle). En conséquence 7 efforts inconnus doivent être mis en place dans Méca3D (fig. 87). Trois efforts de vérins inconnus entre les carter et les coulisseaux correspondant aux 3 mobilités utiles et quatre moments inconnus pour empêcher les 4 rotations internes (rotation des trois vérins et rotation de la bielle).

Une charge de 100 N est placée dans le godet.

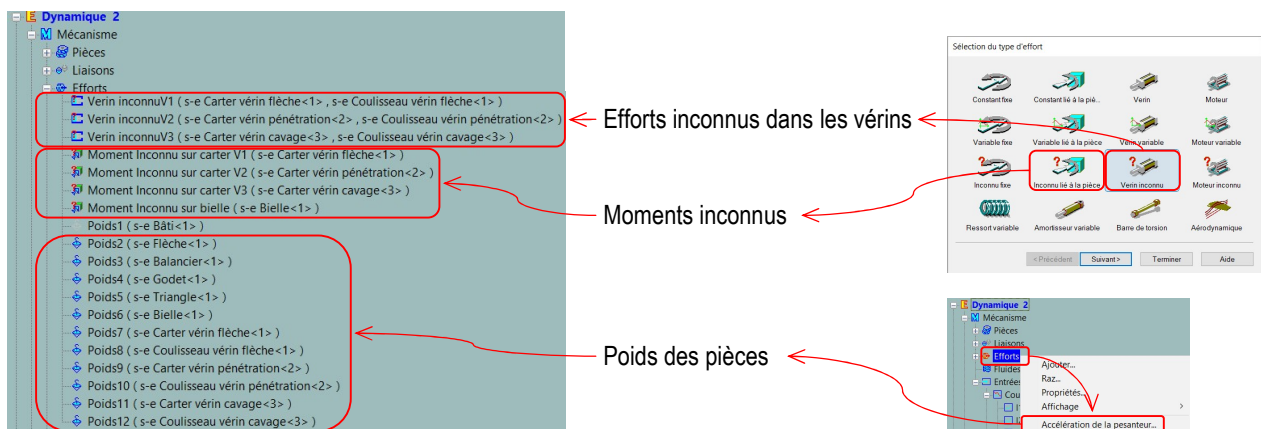


fig. 87 : Efforts dans Méca3D sur les vérins

Après la définition de tous les paramètres le calcul peut être effectué (fig. 88)

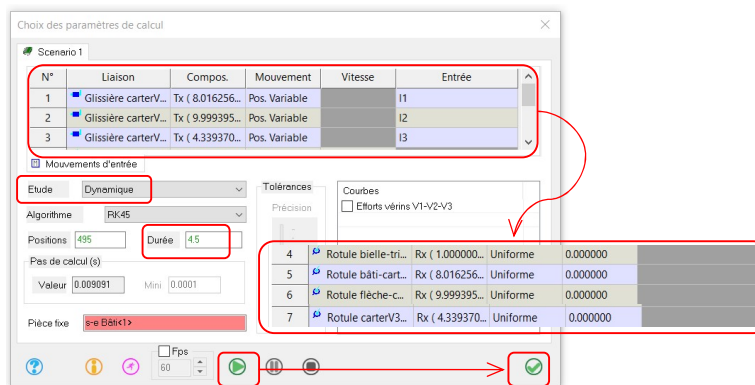


fig. 88 : Paramètres pour la simulation dans Méca3D

Les résultats extraits de Méca3D donnent un effort maximal dans le vérin V1 d'environ 1200 N en début de mouvement, une charge quasi constante de 200 N dans le vérin V2 et une charge constante d'environ 470 N dans le vérin V3.

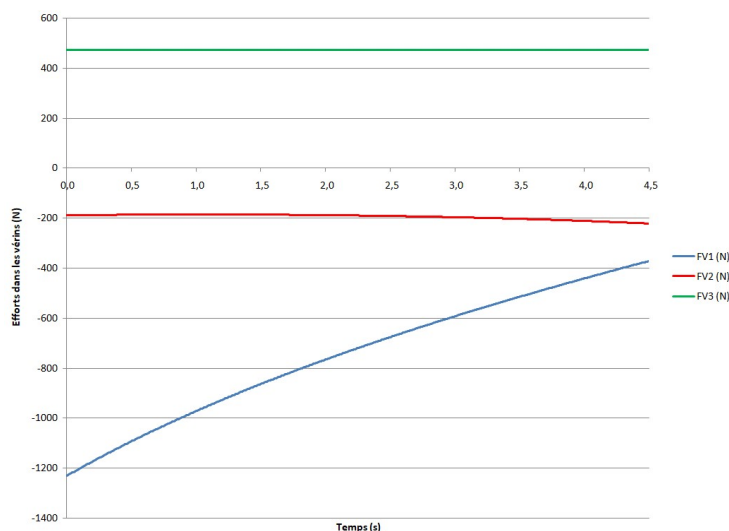


fig. 89 : Efforts sur les coulisseaux des vérins

### 4.3 Modélisation dynamique d'un vérin

#### 4.3.1 Evaluation des masses et des inerties des pièces du vérin électrique

Les matériaux utilisés pour les différentes pièces du vérin électrique sont inconnus.

##### Masses

La pesée des différentes pièces a permis d'obtenir leurs masses (Tableau 1).

La masse **mesurée** du moteur électrique est de 210 g et celle du vérin livré par le constructeur est de 523,5 g. La masse de la maquette numérique est d'environ 670 g (maquette équipée du capteur d'effort, du raccord, etc).

Quelques éléments de masse négligeable ont été omis.

Désignation	Masse (g)
<b>s-e Carter</b>	
Carter 1	47
Carter 2	31,9
Tube section rectangulaire	36,8
Embout	3,8
Chape fixe	8x2
Palier	32,7
Axe palier	5,9
Vis torx l=25	1,1x7
Vis torx l=12	0,6x3
Vis (tube carré)	0,5
Vis (palier)	0,5x2
Stator	82 (évaluation)
s-e Axe vérin	12,4
Capteurs fin de course	??
<b>Total</b>	<b>279,5</b>
<b>s-e Coulisseau</b>	
Tube section circulaire	21,5
Ecrou	5,2
Raccord capteur	12
Capteur	80
Chape capteur	39,6
Axe chape	8,7
Anneau élastique	0,3
<b>Total</b>	<b>167,3</b>

s-e Vis de manœuvre	
Vis de manœuvre	59,3
Billes+cage	1,3
Rondelles	1,3x2
Roulements	4,9x2
Entretoises	1,6x2
Roue hélicoïdale	8,6
Ecrou freiné	3
<b>Total</b>	<b>87,8</b>
<b>s-e Roues dentées</b>	<b>3,4</b>
<b>s-e Arbre moteur</b>	<b>128 (évaluation)</b>
<b>Total</b>	<b>666</b>

Tableau 1 ; Masses des pièces du vérin de la pelleuse

### Inerties

Les masses ayant été renseignées dans Solidworks le logiciel donne les matrices d'inerties des pièces.

### 4.3.2 Analyse mécanique

#### Graphe de structure

Le graphe de structure *fig. 90* correspond au schéma cinématique *fig. 60*.

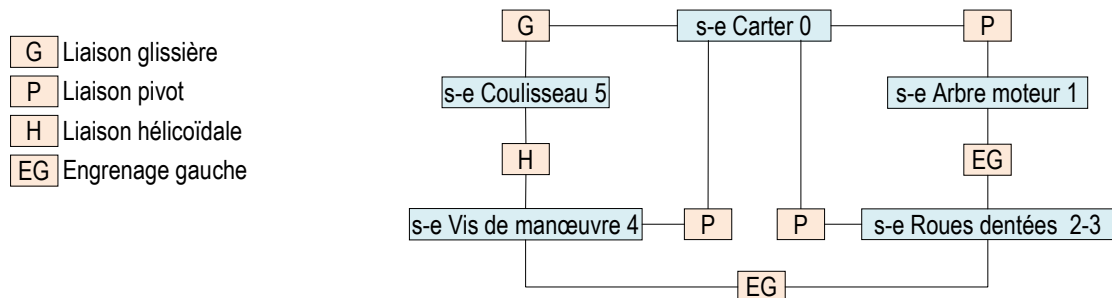


fig. 90 : Graphe de structure

### Analyse cinématique

D'après le schéma cinématique *fig. 60* et le graphe de structure *fig. 90*, le nombre de pièces du vérin est  $N_p = 5$  et le nombre de liaisons est  $N_L = 7$  donc le nombre cyclomatique  $v$  définissant le nombre de cycles indépendants est  $v = N_L - N_p + 1 = 7 - 5 + 1 = 3$ .

Il est donc possible d'écrire  $E_c = 6v = 6 \times 3 = 18$  équations cinématiques de rang  $r_c$  avec  $I_c = 15$  inconnues cinématiques <sup>1</sup>.

Le nombre de degrés de libertés utiles, correspond au mouvement du s-e Arbre moteur, est  $m_{cu} = 1$ .

Intuitivement on ne dénombre pas de libertés internes. Donc le vérin possède un degré de mobilité.

Comme  $r_c = I_c - m_{cu} = 15 - 1 = 14$  alors le degré de surabondance est  $h_c = E_c - r_c = 18 - 14 = 4$ .

En conclusion le vérin comporte un degré de mobilité utile et il est surabondant géométriquement (cinématiquement, ou hyperstatique) de degré quatre.

En conséquence pour des simulations dynamiques du vérin dans Méca3D il faut rendre ce système isostatique <sup>2</sup>.

#### Recherche de l'isostatisme

Une étude cinématique complète montrerait que c'est au niveau du système vis-écrou qu'il y a surabondance de degrés de liaison.

Il existe de nombreuses solutions pour rendre ce mécanisme non surabondant (isostatique) en ajoutant ou non des pièces.

Parmi celles-ci il en est une très simple qui consiste à remplacer la liaison pivot entre le s-e Carter et le s-e Vis de manœuvre par une liaison sphère-plan conformément à la *fig. 91*.

<sup>1</sup> Les deux engrenages gauches (EG) correspondent à deux fois cinq degrés de liberté.

<sup>2</sup> Méca3D supporte un mécanisme hyperstatique pour des études géométrique et/ou cinématique. L'hyperstatisme peut être traité directement dans Méca3D.

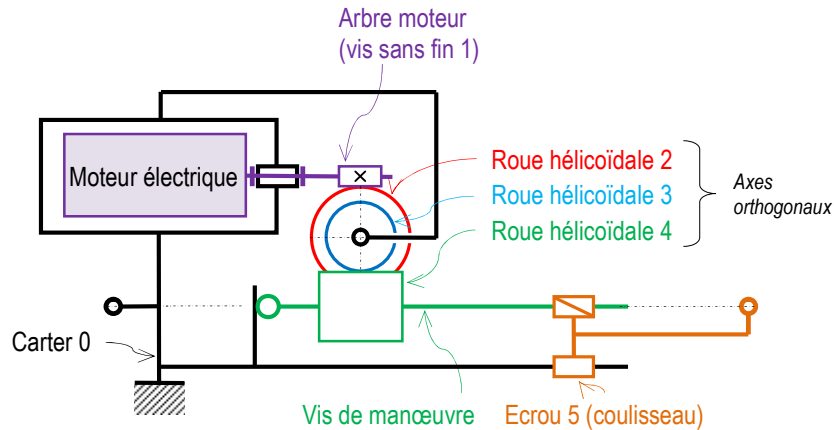


fig. 91 : Schéma cinématique isostatique

Avec ce remplacement le graphe de structure devient celui de la fig. 92.

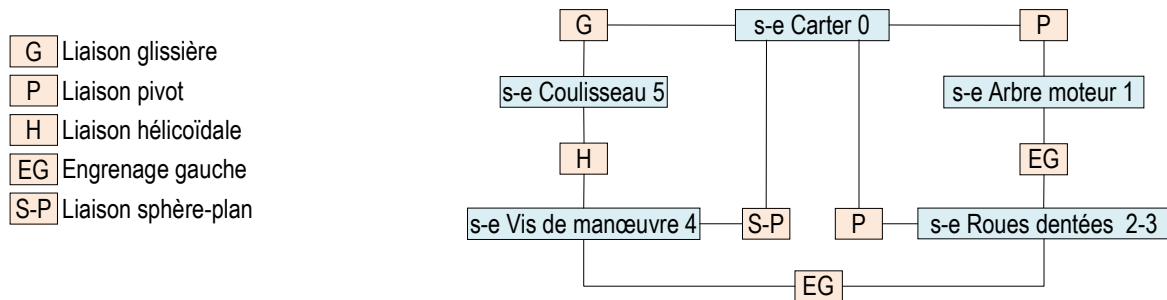


fig. 92 : Graphe de structure du vérin isostatique

Dans ces conditions le nombre d'inconnues cinématiques est  $I_c = 19$ . Alors comme  $r_c = I_c - m_{cu} = 19 - 1 = 18$  alors le degré de surabondance est  $h_c = E_c - r_c = 18 - 18 = 0$ . Le mécanisme est devenu isostatique.

Cette solution n'est pas équivalente du point de vue de la résistance aux efforts extérieurs sur le s-e Vis de manœuvre. En effet l'effort radial sur la roue hélicoïdale 4 (effort perpendiculaire à la vis de manœuvre) est entièrement supporté par le s-e Coulisseau au lieu d'être encaissé, en grande partie, par la liaison pivot.

Pour pallier le défaut de la solution isostatique précédente, il est possible d'ajouter en série deux liaisons pivot glissant d'axes concourants et perpendiculaire à l'axe de la vis de manœuvre entre l'écrou et le coulisseau (montage à « écrou flottant » fig. 93).

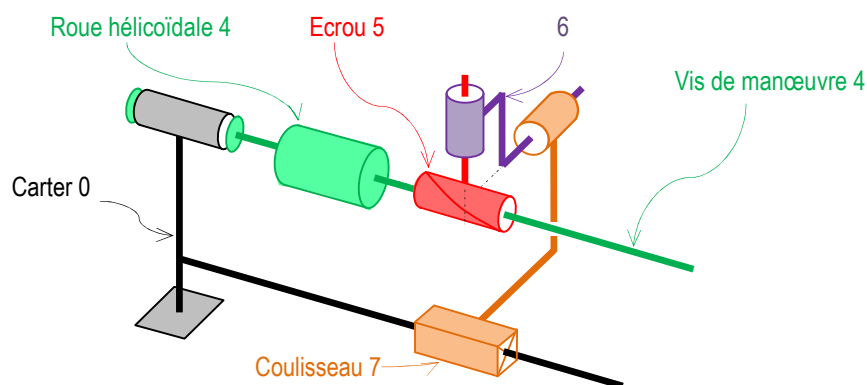


fig. 93 : Montage isostatique du système vis-écrou



donc 
$$J_m = \left[ I_1 + \frac{I_{2-3}}{(r_1)^2} + \frac{I_4}{(r_1 r_2)^2} + \frac{m_5 h^2}{(r_1 r_2)^2} \right]$$

Application numérique

$$r_1 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$r_1 r_2 = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{25 \times 11}{2 \times 6} \cong 22,9$$

$$h = \frac{p}{2\pi} = \frac{3}{2\pi} \cong 0,48 \text{ mm}$$

$$I_1 \cong 4546 \text{ g.mm}^2$$

$$I_{2-3} \cong 106,26 \text{ g.mm}^2$$

$$I_4 \cong 1497,05 \text{ g.mm}^2$$

$$m_5 \cong 86,24 \text{ g}$$

$$J_m = \left[ 4546 + \frac{106,26}{(12,5)^2} + \frac{1497,05}{\left(\frac{25 \times 11}{2 \times 6}\right)^2} + \frac{86,24 \times \left(\frac{3}{2 \times \pi}\right)^2}{\left(\frac{25 \times 11}{2 \times 6}\right)^2} \right]$$

$$J_m = (4546 + 0,68 + 65,33 + 0,04)$$

$$J_m \cong 4546 + 66 \cong 4612 \text{ g.mm}^2 = 4,612 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$$

Les inerties des s-e 2, 3, 4 et 5 sont négligeables par rapport à l'inertie de l'arbre moteur  $I_1$  (la part de l'inertie du s-e Vis de manœuvre 4 est d'à peine 1,5 %).

L'identification à partir du vérin réel donne  $J_m \cong 4600 \text{ g.mm}^2$ .

### 4.3.4 Equation de mouvement du vérin

Le calcul d'un modèle dynamique d'un vérin dans Méca3D nécessite un modèle isostatique (fig. 95).

Pour que le montage des vérins dans la pelleteuse soit isostatique il faut en A et B (fig. 95) des liaisons sphériques avec le milieu extérieur. Alors  $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$ .

**Isolement de  $D \equiv 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5$**

Appliquons le théorème de l'énergie-puissance à ce sous-ensemble pour déterminer la relation entre  $\vec{F}_B$  et le moment du couple électromagnétique sur le rotor du vérin (fig. 95).

$$\frac{dE_{D/0}}{dt} = P_{(\text{ext} \rightarrow 5)/0} + P_{(0 \rightarrow 5)/0} + P_{(0 \rightarrow 4)/0} + P_{(0 \rightarrow 1)/0} + P_{(0 \rightarrow 2 \cup 3)/0} + P_{(1 \leftrightarrow 0)/0} + P_i$$

avec  $P_i$  qui est la puissance des inter-efforts du système autre que le couple électromagnétique du moteur

#### Calcul des puissances

Les puissances  $P_{(0 \rightarrow 5)/0} = P_{(0 \rightarrow 4)/0} = P_{(0 \rightarrow 1)/0} = P_{(0 \rightarrow 2 \cup 3)/0} = P_i = 0$  (liaisons sans frottement).

$$P_{(\text{ext} \rightarrow 5)/0} = \vec{F}_{B \rightarrow 5} \cdot \vec{V}_{5/0} \text{ (5 est en translation rectiligne par rapport au carter 0)}$$

Avec  $v_5$  la vitesse du coulisseau par rapport au carter :

$$P_{(\text{ext} \rightarrow 5)/0} = (\vec{F}_B \cdot \vec{x}) \cdot (\vec{v}_5 \cdot \vec{x}) = F_B v_5$$

Le moteur de translation mt délivre un couple électromagnétique de moment  $\vec{M}_{0 \leftrightarrow 1} \cdot \vec{z} = M_m$

$$P_{(1 \leftrightarrow 0)/0} = M_m \omega_1 \text{ si } \omega_1 \text{ est la vitesse angulaire du moteur.}$$



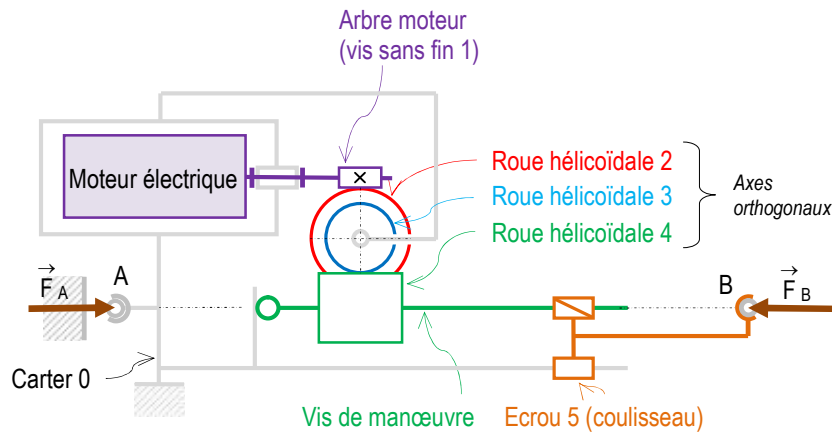


fig. 95 : Montage isostatique du vérin

**Calcul de l'énergie cinétique**

Soit  $J_m$  l'inertie équivalente (cinétique) de l'ensemble  $D = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5$  par rapport au carter 0 (supposé lié à un repère galiléen) ramenée à l'arbre du moteur.

Alors 
$$2E_{D/0} = (\omega_1)^2 J_m$$

**Application du théorème de l'énergie-puissance**

$$\frac{dE_{D/0}}{dt} = P_{(\text{ext} \rightarrow 5)/0} + P_{(1 \leftrightarrow 0)/0}$$

$$\frac{dE_{D/0}}{dt} = \omega_1 \dot{\omega}_1 J_m$$

Avec  $v_5 = \frac{h}{r} \omega_1$  si  $r = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$  est le rapport de transmission du réducteur ( $z$  est le nombre de dents de 1, 2, 3 et 4),

$h = \frac{p}{2\pi}$  est le pas réduit de la liaison hélicoïdale de pas  $p$  à droite (voir §2.3.4 du document « Structure mécanique »).

Alors 
$$M_m = \dot{\omega}_1 J_m - F_B \frac{h}{r_1 r_2}$$

**Application numérique**

On souhaite que le coulisseau du vérin atteigne la vitesse  $v_5 = 0,01 \text{ m.s}^{-1}$  en  $\tau = 2 \text{ s}$  et qu'il se déplace de 80 mm ( $0 \leq l \leq 0,08 \text{ m}$ ).

Le coulisseau est soumis à un effort  $F_B = -1500 \text{ N}$ .

La loi des vitesses du coulisseau est donnée fig. 96.

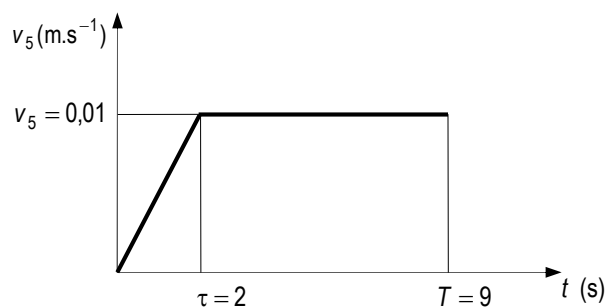


fig. 96 : Loi des vitesses du coulisseau du vérin

La première phase d'une durée  $\tau = 2$  s est telle que  $v_5 = a\tau$  si  $a$  est l'accélération constante ; le déplacement du coulisseau est tel que  $l = \frac{1}{2}a\tau^2$  d'où :

$$a = \frac{v_5}{\tau} = \frac{0,01}{2} = 0,005 \text{ m.s}^{-2}$$

et  $l = \frac{v_5\tau}{2} = \frac{0,01 \times 2}{2} = 0,01$  m le coulisseau parcourt 10 mm.

Pendant la deuxième phase à vitesse constante le coulisseau doit encore parcourir 70 mm. Pour cette phase  $l = v_5 t$  et est donc de durée  $t = \frac{l}{v_5} = \frac{0,07}{0,01} = 7$  s. La durée totale de déplacement est donc  $T = 9$  s.

D'après le document « Structure mécanique » §2.3.4 :

$$r = \frac{25 \times 11}{2 \times 6} \cong 22,9$$

$$h = \frac{0,003}{2\pi}$$

Alors  $v_5 = \frac{2\pi}{25 \times 11} \omega_1 = \frac{0,003 \times 6}{\pi \times 25 \times 11} \omega_1 \cong 2,08 \cdot 10^{-5} \omega_1$

Comme  $J_m \cong 4546 + 66 \cong 4612 \text{ g.mm}^2 = 4,612 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$

et  $a = \frac{h}{r} \dot{\omega}_1$  alors  $\dot{\omega}_1 = \frac{ar}{h} = \frac{0,005 \times \frac{25 \times 11}{2 \times 6}}{\frac{0,003}{2\pi}} \cong 239,9828 \text{ rad.s}^{-2}$

Finalement le moment moteur :

$$M_m = \frac{0,005 \times \frac{25 \times 11}{2 \times 6}}{\frac{0,003}{2\pi}} \times 4,612 \cdot 10^{-6} + 1500 \times \frac{0,003 \times 6}{\pi \times 25 \times 11} \cong 0,00111 + 0,03125 \cong 0,03236 \text{ Nm}$$

$$M_m \cong 0,03236 \text{ Nm}$$

La part du moment dû à l'inertie est négligeable vis-à-vis de celle dû à l'effort  $F_B$ .

#### 4.3.5 Simulation dynamique du vérin

La fig. 97 montre la construction des pièces et des liaisons du vérin isostatique.

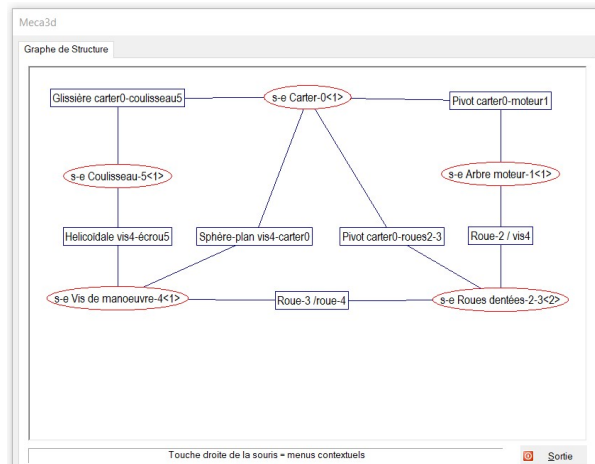
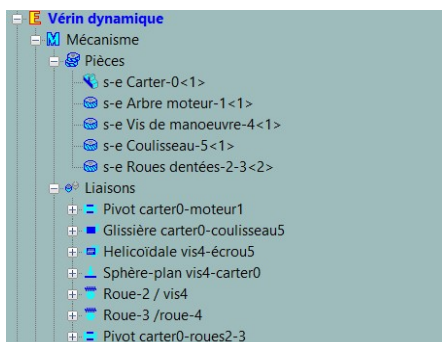
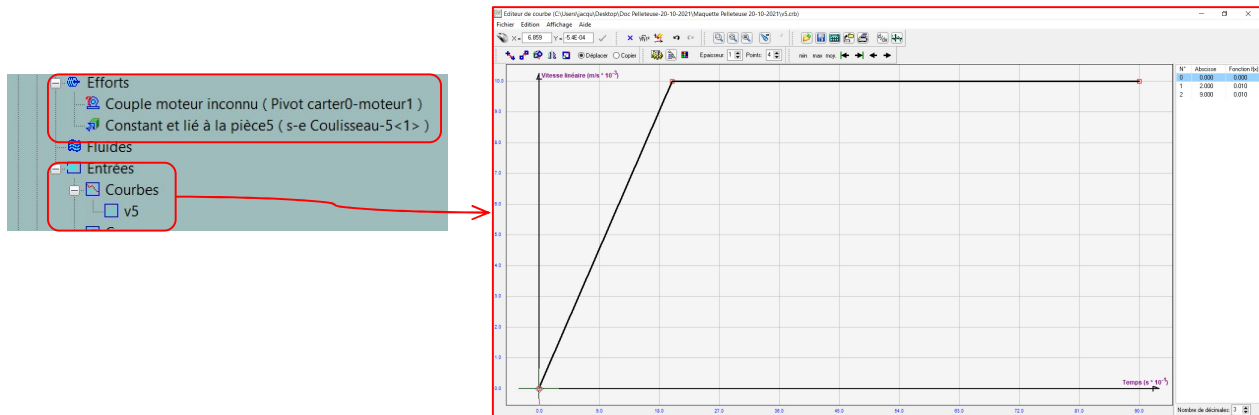


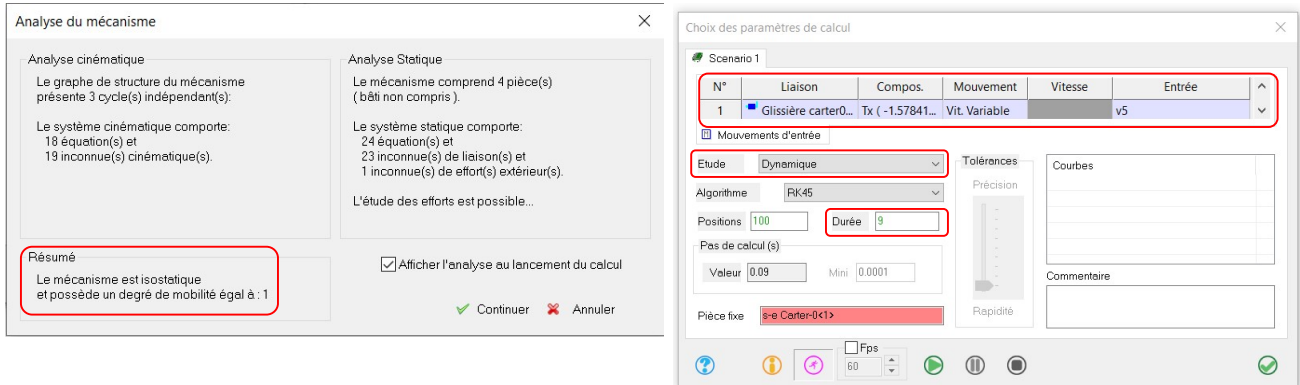
fig. 97 : Construction du vérin et du graphe de structure dans Meca3D

Comme la loi de mouvement du coulisseau du vérin est connue alors le moment moteur est inconnu  
La *fig. 98* montre la courbe des vitesses du coulisseau, le couple moteur inconnu et l'effort constant de 1500 N sur le coulisseau.



*fig. 98 : Loi de vitesse du coulisseau du vérin*

La *fig. 99* montre l'analyse mécanique effectuée par Méca3D ainsi que le choix des paramètres de calcul.



*fig. 99*

Tous les résultats numériques sont validés par la simulation dynamique.

#### 4.4 Détermination analytique de l'effort du vérin de flèche en dynamique

##### 4.4.1 Contraintes cinématiques

En situation initiale l'angle  $\gamma_1 = 20^\circ$ ,  $\gamma_2 = -85^\circ$  et le godet 3 est orienté par  $\gamma_3$  (*fig. 100* et §4.2).

On désire que  $\vec{x}'_3$  soit tel que  $(\vec{x}'_3, \vec{x}_0) = 180^\circ$  afin que le godet reste « horizontal ».

$$\begin{aligned}(\vec{x}'_3, \vec{x}_0) &= (\vec{x}'_3, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_2) + (\vec{x}_2, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_0) \\ 180 &= \beta_3 - \gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1 \\ \gamma_3 &= -180 + \beta_3 - \gamma_2 - \gamma_1\end{aligned}$$

Comme  $(\vec{x}'_3, \vec{x}_3) = \beta_3 \cong 58,374^\circ$  alors en situation initiale  $\gamma_3 = -180 + 58,374 + 85 - 20 \cong -56,26^\circ$  (cet angle est légèrement plus grand que celui indiqué au §1.16 mais reste admissible pour éviter les collisions)

Lorsque les coordonnées articulaires évoluent :  $20^\circ \leq \gamma_1 \leq 65^\circ$  et  $-85^\circ \leq \gamma_2 \leq -130^\circ$ , l'angle  $\gamma_3 \cong -56,26^\circ$  reste constant (*fig. 79*).

En conséquence au cours du mouvement l'ensemble  $2 \cup (3 + \text{charge}) \cup 4 \cup 5 \cup V3$  se comporte comme un solide.

Les positions initiale et finale du bras de pelleteuse est donnée *fig. 84*.

##### 4.4.2 Hypothèses

Les liaisons sont géométriquement parfaites et sans frottement.

Le vérin de cavage ne comporte que le corps et le coulisseau.

Les masses des vérins de flèche et de pénétration sont négligées.

Le vérin de flèche est lié au bâti 0 en A et à la flèche 1 en B par des liaisons sphériques.

Le repère  $O_1; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  est galiléen et le plan  $O_1; \vec{x}_0, \vec{y}_0$  est plan de symétrie géométrique et mécanique.

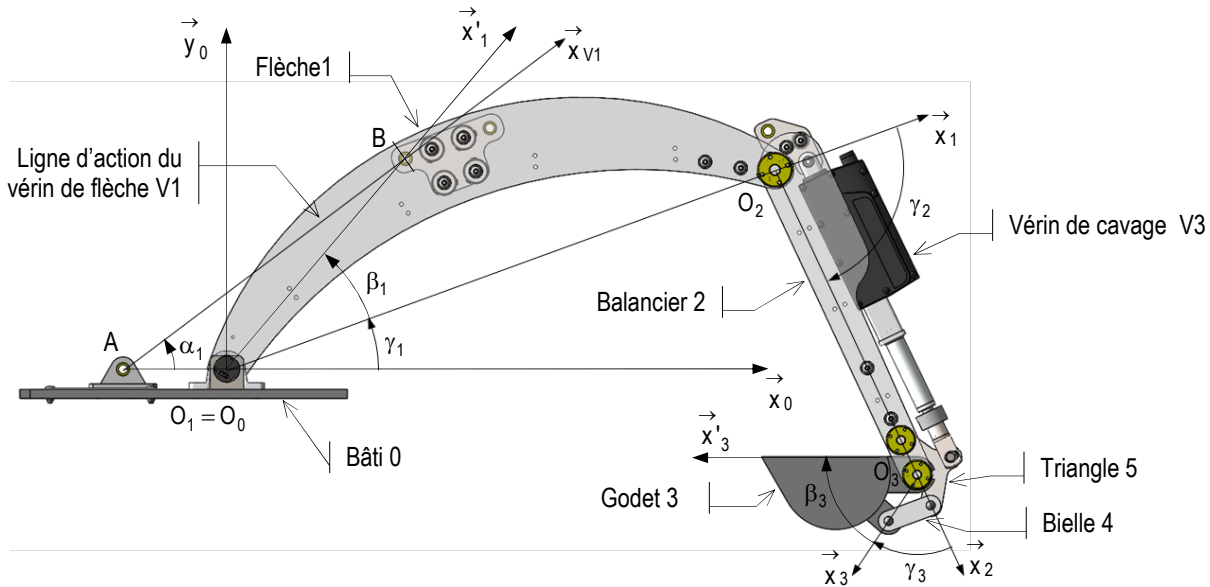


fig. 100

#### 4.4.3 Isolement de $E \equiv 1 \cup D$

On pose  $D \equiv 2 \cup (3 + \text{charge}) \cup 4 \cup 5 \cup V3$  et  $E \equiv 1 \cup D$  dans une situation la quelconque.

L'équation torsielle issue du principe fondamental de la dynamique donne

$$\{0 \rightarrow 1\} + \{V1 \rightarrow 1\} + \{\text{pes} \rightarrow E\} = \{A_{E/0}\}$$

avec  $\{A_{E/0}\}$  qui est le torseur dynamique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $O_1; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$

L'équation des moments en  $O_1$  en conséquence sur  $\vec{z}$  donne

$$\vec{M}_{O_1,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O_1,V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O_1,\text{pes} \rightarrow E} \cdot \vec{z} = \vec{\delta}_{O_1,D/0} \cdot \vec{z}$$

si  $\vec{\delta}_{O_1,D/0} \cdot \vec{z}$  est le moment dynamique de D par rapport à 0.

Compte tenu des hypothèses  $\vec{M}_{O_1,0 \rightarrow 1} = \vec{0}$ .

#### 4.4.4 Actions mécaniques

Calcul de  $\vec{M}_{O_1,V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z}$

Compte tenu des hypothèses  $\vec{F}_{0 \rightarrow V1} + \vec{F}_{V1 \rightarrow 1} = \vec{0}$  alors  $\vec{F}_{V1 \rightarrow 1} = F_{V11} \vec{x}_{V1}$

En utilisant un paramétrage tel que :

$$\vec{O_1B} = \lambda_1 \vec{x}'_1$$

Alors

$$\vec{M}_{O_1,V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = (\vec{O_1B} \wedge F_{V11} \vec{x}_{V1}) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{M}_{O_1,V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = F_{V11} \vec{x}_{V1} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{O_1B}) = F_{V11} \vec{x}_{V1} \cdot (\vec{z} \wedge \lambda_1 \vec{x}'_1)$$

$$\vec{M}_{O_1,V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = \lambda_1 F_{V11} \vec{x}_{V1} \cdot \vec{y}'_1$$

$$\left( \vec{x}_{V1} \cdot \vec{y}'_1 \right) = \left( \vec{x}_{V1} \cdot \vec{x}_0 \right) + \left( \vec{x}_0 \cdot \vec{x}'_1 \right) + \left( \vec{x}'_1 \cdot \vec{y}'_1 \right) = -\alpha_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{M}_{O_1,V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = \lambda_1 F_{V11} \cos(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1 + \frac{\pi}{2})$$

$$\vec{M}_{O_1, V1 \rightarrow 1} \cdot \vec{Z} = -\lambda_1 F_{V11} \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1)$$

Calcul de  $\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow E} \cdot \vec{Z} = \vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 1} \cdot \vec{Z} + \vec{M}_{O_1, pes \rightarrow D} \cdot \vec{Z}$

D'une part  $\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 1} = \underbrace{\vec{M}_{G_1, pes \rightarrow 1}}_{=0} + \vec{O_1 G_1} \wedge -m_1 g \vec{y}_0$

La fig. 101 issue de Solidworks donne les constantes d'inertie du s-e Flèche 1.

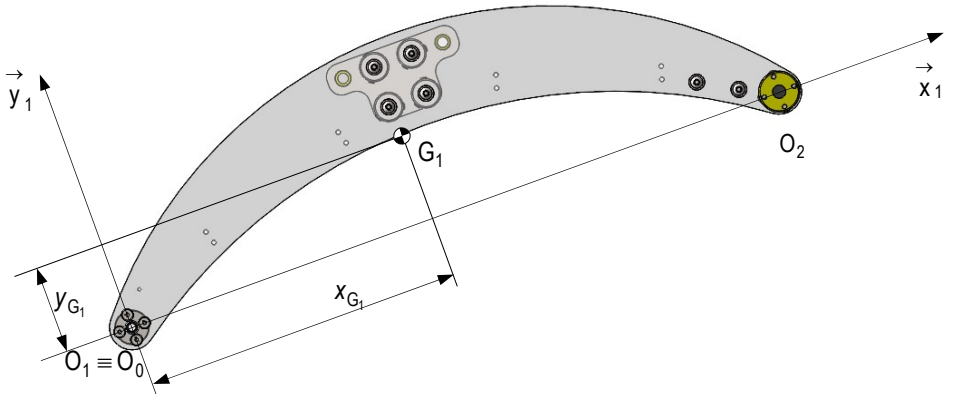
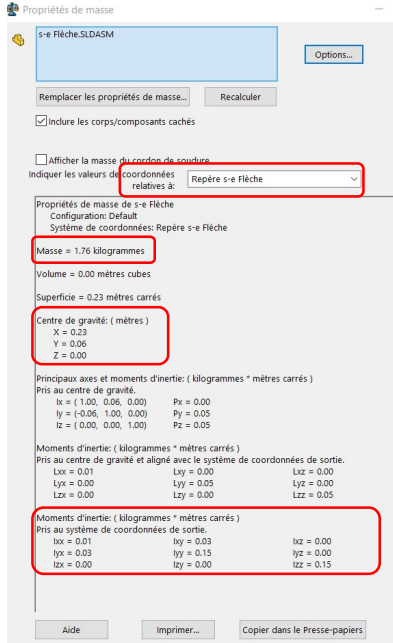


fig. 101 : Constantes d'inertie du s-e Flèche

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 1} \cdot \vec{Z} = \vec{Z} \cdot (\vec{O_1 G_1} \wedge -m_1 g \vec{y}_0)$$

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 1} \cdot \vec{Z} = \vec{O_1 G_1} \cdot (-m_1 g \vec{y}_0 \wedge \vec{Z}) = -m_1 g \vec{O_1 G_1} \cdot \vec{x}_0$$

avec

$$\vec{O_1 G_1} = x_{G_1} \vec{x}_1 + y_{G_1} \vec{y}_1$$

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 1} \cdot \vec{Z} = -m_1 g (x_{G_1} \vec{x}_1 + y_{G_1} \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 1} \cdot \vec{Z} = m_1 g (-x_{G_1} \cos \gamma_1 + y_{G_1} \sin \gamma_1)$$

D'autre part

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow D} = \underbrace{\vec{M}_{G_D, pes \rightarrow D}}_{=0} + \vec{O_1 G_D} \wedge -m_D g \vec{y}_0$$

La fig. 102 issue de Solidworks donne les caractéristiques du s-e D  $\equiv 2 \cup (3 + \text{charge}) \cup 4 \cup 5 \cup V3$ .

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow D} \cdot \vec{Z} = \vec{Z} \cdot (\vec{O_1 G_D} \wedge -m_D g \vec{y}_0) = \vec{O_1 G_D} \cdot (-m_D g \vec{y}_0 \wedge \vec{Z})$$

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow D} \cdot \vec{Z} = -m_D g \vec{x}_0 \cdot \vec{O_1 G_D}$$

avec

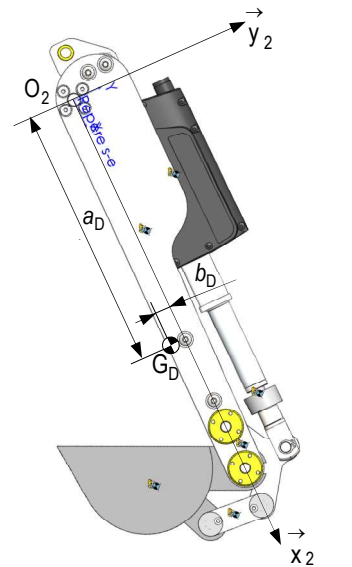
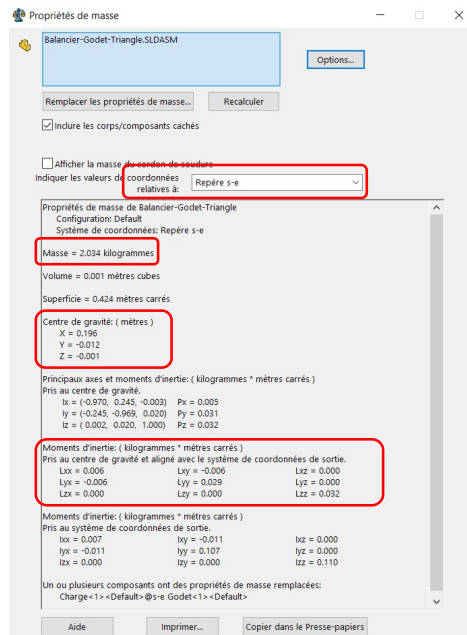
$$\vec{O_1 G_D} = \vec{O_1 O_2} + \vec{O_2 G_D} = L_1 \vec{x}_1 + a_D \vec{x}_2 + b_D \vec{y}_2$$

$$\vec{O_1 G_D} \cdot \vec{x}_0 = L_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 + a_D \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 + b_D \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_0$$

alors

$$\vec{O_1 G_D} \cdot \vec{x}_0 = L_1 \cos \gamma_1 + a_D \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - b_D \sin(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\vec{M}_{O_1, pes \rightarrow D} \cdot \vec{Z} = -m_D g (L_1 \cos \gamma_1 + a_D \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - b_D \sin(\gamma_1 + \gamma_2))$$



$$s-e D \equiv 2 \cup (3 + \text{charge}) \cup 4 \cup 5 \cup V3$$

fig. 102 : Constantes d'inertie du s-e D  $\equiv 2 \cup (3 + \text{charge}) \cup 4 \cup 5 \cup V3$

#### 4.4.5 Moment dynamique $\vec{\delta}_{O_1, E/0} \cdot \vec{z}$

Le moment cinétique de E  $\vec{\sigma}_{O_1, E/0}$  est déterminé à partir de

$$\vec{\sigma}_{O_1, E/0} = \vec{\sigma}_{O_1, 1/0} + \vec{\sigma}_{O_1, D/0}$$

et le moment dynamique  $\vec{\delta}_{O_1, E/0}$  à partir de

$$\vec{\delta}_{O_1, E/0} = \frac{d\vec{\sigma}_{O_1, E/0}}{dt} + \underbrace{\vec{V}_{O_1/0}}_{=0} \wedge m_D \vec{V}_{G_E/0}$$

• Le moment cinétique du s-e Flèche 1 est

$$\vec{\sigma}_{O_1, 1/0} = I_{O_1(1)} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \text{ car le point } O_1 \text{ est fixe dans } 0 \text{ et avec } I_{G_1, 1} \text{ la matrice d'inertie de } 1 \text{ en } O_1.$$

avec

$$\vec{V}_{O_1/0} = \vec{0}$$

$$I_{O_1(1)} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

et

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\gamma}_1 \vec{z}$$

alors

$$\vec{\sigma}_{O_1, 1/0} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}_1 \end{pmatrix}$$

finalment

$$\vec{\sigma}_{O_1, 1/0} = C_1 \dot{\gamma}_1 \vec{z}$$

• Le moment cinétique du s-e D est donné par

$$\vec{\sigma}_{O_1, D/0} = \vec{\sigma}_{G_D, D/0} + m_D \vec{O_1 G_D} \wedge \vec{V}_{G_D, D/0}$$

Comme  $G_D$  est le centre de masse du s-e D alors  $\vec{\sigma}_{G_D/D/0} = I_{G_D(D)} \cdot \vec{\Omega}_{D/0}$

avec 
$$I_{G_D(D)} = \begin{pmatrix} A_D & -F_D & 0 \\ -F_D & B_D & 0 \\ 0 & 0 & C_D \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})}$$

et 
$$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\gamma}_2 \vec{z}$$
  

$$\vec{\Omega}_{D/0} = \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = (\dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_1) \vec{z}$$
  

$$I_{G_D(D)} \cdot \vec{\Omega}_{D/0} = \begin{pmatrix} A_D & -F_D & 0 \\ -F_D & B_D & 0 \\ 0 & 0 & C_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}$$

Comme 
$$\vec{\sigma}_{G_D/D/0} = C_D (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$
  

$$\vec{V}_{O_2/0} = \underbrace{\vec{V}_{O_1/0}}_{=\vec{0}} + \vec{O}_2 \vec{O}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$
  

$$\vec{V}_{G_D/0} = \vec{V}_{O_2/0} + \vec{G}_D \vec{O}_2 \wedge \vec{\Omega}_{D/0}$$
  

$$\vec{V}_{G_D/0} = \underbrace{\vec{V}_{O_1/0}}_{=\vec{0}} + \vec{O}_2 \vec{O}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0} + \vec{G}_D \vec{O}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

et 
$$\vec{O}_1 \vec{O}_2 = \vec{O}_1 \vec{O}_2 = L_1 \vec{x}_1$$
  

$$\vec{O}_2 \vec{G}_D = a_D \vec{x}_2 + b_D \vec{y}_2$$
  

$$\vec{O}_1 \vec{O}_2 + \vec{O}_2 \vec{G}_D = L_1 \vec{x}_1 + a_D \vec{x}_2 + b_D \vec{y}_2 = L_1 (\cos \gamma_2 \vec{x}_2 - \sin \gamma_2 \vec{y}_2) + a_D \vec{x}_2 + b_D \vec{y}_2$$
  

$$\vec{O}_1 \vec{G}_D = (a_D + L_1 \cos \gamma_2) \vec{x}_2 + (b_D - L_1 \sin \gamma_2) \vec{y}_2$$
  

$$\vec{V}_{O_2/0} = -L_1 \vec{x}_1 \wedge \dot{\gamma}_1 \vec{z} = L_1 \dot{\gamma}_1 \vec{y}_1 = L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 \vec{x}_2 + L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 \vec{y}_2$$
  

$$\vec{V}_{G_D/0} = L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 \vec{x}_2 + L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 \vec{y}_2 - (a_D \vec{x}_2 + b_D \vec{y}_2) \wedge \dot{\gamma}_2 \vec{z}$$
  

$$\vec{V}_{G_D/0} = (L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 - b_D \dot{\gamma}_2) \vec{x}_2 + (L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 + a_D \dot{\gamma}_2) \vec{y}_2$$

$$m_D \vec{O}_1 \vec{G}_D \wedge \vec{V}_{G_D/0} = m_D \left( (a_D + L_1 \cos \gamma_2) \vec{x}_2 + (b_D - L_1 \sin \gamma_2) \vec{y}_2 \right) \wedge \left( (L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 - b_D \dot{\gamma}_2) \vec{x}_2 + (L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 + a_D \dot{\gamma}_2) \vec{y}_2 \right)$$

$$m_D \vec{O}_1 \vec{G}_D \wedge \vec{V}_{G_D/0} = \left( m_D (a_D + L_1 \cos \gamma_2) (L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 + a_D \dot{\gamma}_2) \vec{z} - m_D (b_D - L_1 \sin \gamma_2) (L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 - b_D \dot{\gamma}_2) \vec{z} \right)$$

$$m_D \vec{O}_1 \vec{G}_D \wedge \vec{V}_{G_D/0} = (m_D a_D + m_D L_1 \cos \gamma_2) (L_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 + a_D \dot{\gamma}_2) \vec{z} + (-m_D b_D + m_D L_1 \sin \gamma_2) (L_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 - b_D \dot{\gamma}_2) \vec{z}$$

$$m_D \vec{O}_1 \vec{G}_D \wedge \vec{V}_{G_D/0} = (m_D L_1 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) (a_D \cos \gamma_2 + b_D \sin \gamma_2) + m_D L_1^2 \dot{\gamma}_1 + m_D \dot{\gamma}_2 (a_D^2 + b_D^2)) \vec{z}$$

$$\vec{\sigma}_{O_1,D/0} = (C_D (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) + m_D L_1 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) (a_D \cos \gamma_2 + b_D \sin \gamma_2) + m_D L_1^2 \dot{\gamma}_1 + m_D \dot{\gamma}_2 (a_D^2 + b_D^2)) \vec{z}$$

Pour l'ensemble E :

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0} = (C_1 \dot{\gamma}_1 + C_D (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) + m_D L_1 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) (a_D \cos \gamma_2 + b_D \sin \gamma_2) + m_D L_1^2 \dot{\gamma}_1 + m_D \dot{\gamma}_2 (a_D^2 + b_D^2)) \vec{z}$$

### • Moment dynamique de l'ensemble E

Les vitesses angulaires  $\dot{\gamma}_1$  et  $\dot{\gamma}_2$  sont constantes.

$$\vec{\delta}_{O_1,E/0} = \frac{d\vec{\sigma}_{O_1,E/0}}{dt} = (C_1 \dot{\gamma}_1 + C_D (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) + m_D L_1 \dot{\gamma}_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) (-a_D \sin \gamma_2 + b_D \cos \gamma_2) + m_D L_1^2 \dot{\gamma}_1 + m_D \dot{\gamma}_2 (a_D^2 + b_D^2)) \vec{z}$$

#### 4.4.6 Application du principe fondamental de la dynamique

L'application du principe fondamental de la dynamique pour l'équation de moment en O1 et en conséquence sur  $\vec{z}$  donne

$$- \lambda_1 F_{V11} \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1) + m_1 g (-x_{G_1} \cos \gamma_1 + y_{G_1} \sin \gamma_1) - m_D g (L_1 \cos \gamma_1 + a_D \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - b_D \sin(\gamma_1 + \gamma_2))$$

$$= C_1 \dot{\gamma}_1 + C_D (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) + m_D L_1 \dot{\gamma}_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) (-a_D \sin \gamma_2 + b_D \cos \gamma_2) + m_D L_1^2 \dot{\gamma}_1 + m_D \dot{\gamma}_2 (a_D^2 + b_D^2)$$

D'où l'effort du coulisseau du vérin de flèche V1 sur la flèche 1.

$$F_{V11} = \frac{[m_1 g (-x_{G_1} \cos \gamma_1 + y_{G_1} \sin \gamma_1) - m_D g (L_1 \cos \gamma_1 + a_D \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - b_D \sin(\gamma_1 + \gamma_2)) - C_1 \dot{\gamma}_1 - C_D (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) - m_D (L_1 \dot{\gamma}_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) (-a_D \sin \gamma_2 + b_D \cos \gamma_2) + L_1^2 \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 (a_D^2 + b_D^2))]}{\lambda_1 \sin(\gamma_1 + \beta_1 - \alpha_1)}$$

#### 4.4.7 Application numérique

- Le fichier Excel « Effort V1 » donne l'évolution de l'effort  $F_{V11}$  en fonction des coordonnées articulaires  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et avec une masse de 0,5 kg dans le godet :  $-267,6 \text{ N} \leq F_{V11} \leq -75,4 \text{ N}$ .
- La simulation de la maquette numérique (configuration simplifiée) dans Méca3D (étude « dynamique2 ») donne :  $-293,15 \text{ N} \leq F_{V11} \leq -78,81 \text{ N}$ .
- La simulation dynamique de la maquette numérique complète (configuration complète) donne :  $-334,7 \text{ N} \leq F_{V11} \leq -87,4 \text{ N}$ .
- La simulation statique de la maquette numérique complète (configuration complète) donne :  $-335,4 \text{ N} \leq F_{V11} \leq -87,5 \text{ N}$ .